

COMPARAÇÃO DE TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DIRETOS E INVERSOS PARA ESTIMAÇÃO DE TEMPERATURAS E FLUXOS DE CALOR

Lucca S. Pereira¹ (IC), Sandro M. M. Lima e Silva (PQ)¹

¹Laboratório de Transferência de Calor, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Palavras-chave: COMSOL. IHCP. Método das Diferenças Finitas. Método da Função Especificada. Transferência de Calor.

Introdução

Entre os acontecimentos do dia-a-dia, muitos problemas envolvem a transferência de calor, desde os mais simples como sistemas de ar condicionado para refrigeração, até problemas mais complexos como a determinação do fluxo de calor na superfície de um objeto reentrando na atmosfera. Por esses motivos, é de suma importância o estudo de problemas de transferência de calor.

Neste trabalho, serão utilizados diferentes métodos numéricos, com diferentes abordagens adequadas a cada problema, de modo que seja possível comparar seus resultados, além de constatar suas vantagens e desvantagens em relação uns aos outros.

Para a resolução de problemas diretos, foi escolhido o Método das Diferenças Finitas (MDF) (Incropera *et al.*, 2008). O MDF pode ser aplicado de maneira implícita ou explícita, ambas serão aplicadas e comparadas quanto às vantagens e desvantagens.

Para a resolução de problemas inversos, foi escolhido o Método da Função Especificada (MFE) (Beck; Blackwell; Clair, 1985). O Método da Função Especificada é uma abordagem utilizada para estimar fluxo de calor em problemas inversos em transferência de calor, quando se busca determinar o fluxo de calor desconhecido em uma superfície ou em um ponto específico de um material.

Metodologia

Método das Diferenças Finitas

O método das Diferenças Finitas é uma técnica numérica amplamente utilizada para resolver equações diferenciais parciais (EDPs), como as que aparecem em problemas de transferência de calor. Em essência, ele consiste em substituir as derivadas presentes nas equações diferenciais por aproximações baseadas em valores discretos da função, calculados em uma malha ou grade de pontos.

Considerando um sistema unidimensional igual ao da Figura 1.

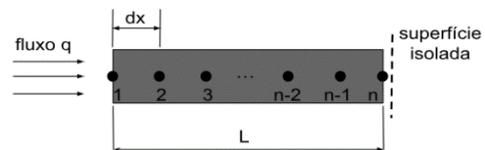


Figura 1 - Parede plana de largura L , isolada em L e submetida a um fluxo q , subdividida em n pontos nodais com distância dx entre si.

E considerando também um problema linear, ou seja, sem variações de parâmetros e com ausência de geração interna, a equação de condução de calor apropriada é:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Utilizando as aproximações por diferenças finitas para a discretização do tempo, por diferenças centrais para a discretização no espaço e fazendo rearranjos obtemos 3 equações para o método explícito.

A primeira equação é utilizada para calcular a temperatura na superfície submetida ao fluxo, a segunda para os nós intermediários e a terceira na superfície isolada

$$T_0^{p+1} = 2Fo \left(\frac{q_0 \Delta x}{k} + T_1^p \right) + (1 - 2Fo)T_0^p$$

$$T_m^{p+1} = (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p)Fo + (1 - 2Fo)T_m^p$$

$$T_m^{p+1} = 2FoT_{m-1}^p + (1 - 2Fo)T_m^p$$

Onde o índice sobrescrito indica o passo de tempo e o índice subscrito indica a posição.

Para que as equações possam ser utilizadas, o critério de estabilidade deve ser suprido:

$$Fo \leq 1/2$$

No método explícito, a temperatura em qualquer nó é calculada utilizando a temperatura no próprio nó e nos nós vizinhos em um instante de tempo anterior. Deste modo, a temperatura é independente das temperaturas nos outros nós naquele mesmo instante. Embora computacionalmente o método ofereça vantagens, ele

apresenta limitações com relação a estabilidade, forçando o uso de valores extremamente pequenos para o intervalo de tempo Δt . Por esses motivos, em certas ocasiões, a utilização do método de Diferenças Finitas implícito pode ser uma ferramenta vantajosa.

Novamente, considerando um sistema idêntico ao da Figura 1. A equação da condução de calor é utilizada para a aproximar a derivada no tempo no novo instante $p+1$, ao invés de no tempo anterior p . Resultando em novas 3 equações para o método implícito.

A primeira equação é utilizada para calcular a temperatura na superfície submetida ao fluxo, a segunda para os nós intermediários e a terceira na superfície isolada

$$T_m^{p+1} = \frac{\frac{2\alpha q \Delta t}{k \Delta x} + 2FoT_1^{p+1} + T_0^{p+1}}{(1 + 2Fo)}$$

$$T_m^{p+1} = \frac{(T_{m+1}^{p+1} + T_{m-1}^{p+1})Fo + T_m^p}{(1 + 2Fo)}$$

$$T_m^{p+1} = \frac{2FoT_{m-1}^{p+1} + T_m^p}{(1 + 2Fo)}$$

Método da Função Especificada

O MFE pode ser utilizado de duas maneiras, na primeira todos os parâmetros são estimados simultaneamente para todo o intervalo de tempo, no segundo os parâmetros são estimados sequencialmente. Será trabalhado com o segundo procedimento, nomeado de procedimento sequencial, estimando os segmentos um após o outro, começando com os tempos iniciais e então aumentando para tempos maiores.

Para este procedimento temos a seguinte equação para estimar o fluxo:

$$\hat{q}_m = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^J (Y_{j,m+i-1} - T_{j,m+i-1}|_{q_m=\dots=0}) \Phi_{ji}}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^J \Phi_{ji}^2}$$

Procedimento experimental

Para avaliar o funcionamento das equações em suas devidas funções, 3 experimentos foram conduzidos, o primeiro utilizando uma amostra em PVC, o segundo uma amostra em alumínio 5052 e ultimo uma amostra em metal duro.

Para o experimento do PVC, o MDF será aplicado, utilizando o fluxo experimental obtido pelo transdutor para estimar as temperaturas e compara-las com a temperatura experimental obtida por um termopar.

Para os experimentos do alumínio e do metal duro, diversos termopares foram posicionados nas amostras, para que utilizando os valores obtidos por eles, o fluxo de calor pudesse ser estimado e comparado com

os valores experimentais obtidos pelos transdutores.

A montagem experimental dos experimentos envolvendo o PVC e o alumínio foram semelhantes, alterando somente suas dimensões. Ela foi modelada na Figura 2.

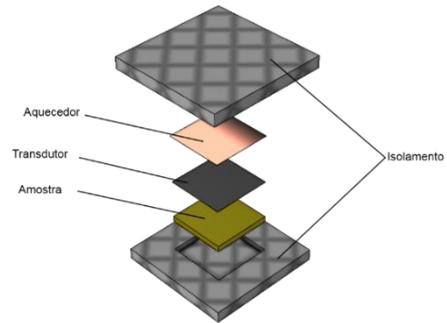


Figura 2 -Esquema da montagem do conjunto amostra, aquecedor, transdutor e isolamento.

A montagem experimental do metal duro foi feita conforme a Figura 3, onde o aquecedor não cobria totalmente a face superior da amostra e as superfícies não afetadas pelo aquecedor estavam sofrendo convecção com o ar.

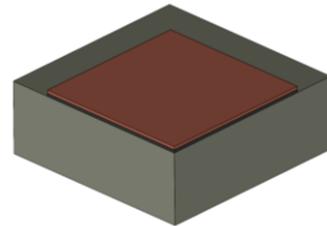


Figura 3 - Montagem experimental da amostra de metal duro.

Resultados e discussão

Resultados experimento PVC

Nesse experimento, devido às condições impostas, é possível reduzir o problema para um problema unidimensional, exatamente igual ao da Figura 1, o que possibilita a utilização do método das Diferenças Finitas para encontrar a temperatura na superfície.

Visto que o problema supre o critério de estabilidade do método explícito as Equações método das Diferenças Finitas explícito foram programadas no programa MATLAB e os dados experimentais foram computados. Os resultados obtidos foram plotados na Figura 4 junto das temperaturas obtidas experimentalmente. Foram plotadas também, na Figura 5, as diferenças percentuais entre as temperaturas.

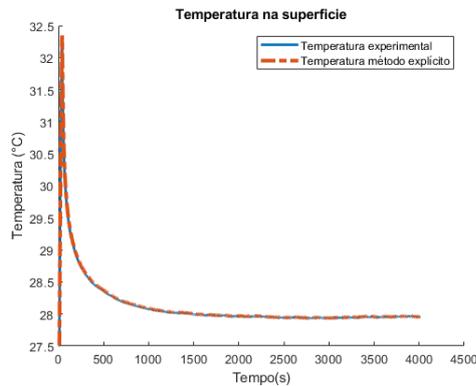


Figura 4 - Resultados obtidos da temperatura na superfície da amostra de PVC pelo método explícito.

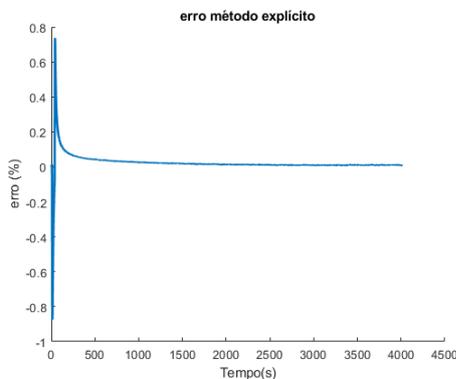


Figura 5 – Diferenças percentuais entre as temperaturas para o método explícito.

As equações do Método das Diferenças Finitas implícito, também foram programados no MATLAB e, utilizando os mesmos dados para o método explícito, foram computadas.

As temperaturas obtidas para a superfície pelo método implícito foram plotadas na Figura 6 e as diferenças percentuais entre elas e as temperaturas experimentais foram plotadas na Figura 7.

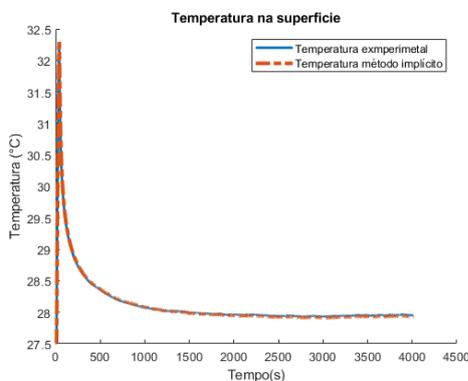


Figura 6 -Resultados obtidos da temperatura na superfície amostra de PVC pelo método implícito.

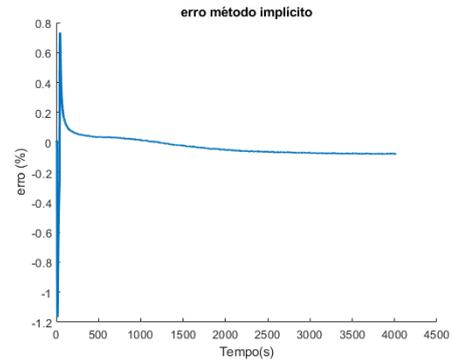


Figura 7 – Diferenças percentuais entre as temperaturas para o método implícito.

Com estes resultados, é possível dizer que ambas aplicações garantem uma assertividade satisfatória na estimação de temperaturas. No entanto, ressalvas devem ser feitas. O método explícito apresenta critério de convergência muito restrito, dificultando sua aplicação em materiais bons condutores. Por outro lado, o método implícito não exige critério de convergência, entretanto, a sua exigência computacional é maior.

Resultados experimento alumínio 5052

Para este experimento, utilizou-se o método da Função Especificada com múltiplos sensores para estimar o fluxo de calor. Para isso, a equação do Método da Função Especificada foi implementada no software MATLAB. O coeficiente de sensibilidade foi calculado de pela equação analítica:

$$\Delta\Phi = \frac{L}{K} \left(\frac{\alpha t}{l^2} + \frac{1}{3} - \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

Os resultados obtidos para o fluxo de calor estimado e o fluxo de calor experimental foram plotados na Figura 8. Além disso, a diferença entre o valor experimental e o valor calculado foram plotados na Figura 9.

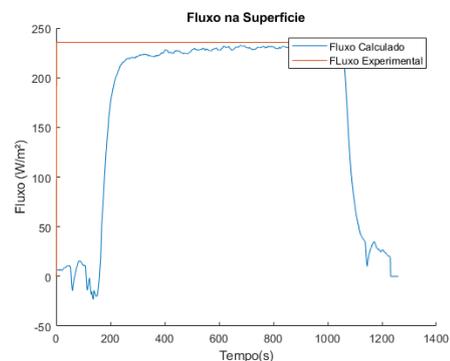


Figura 8 - Fluxos de calor estimados na superfície da amostra de alumínio pelo MFE.

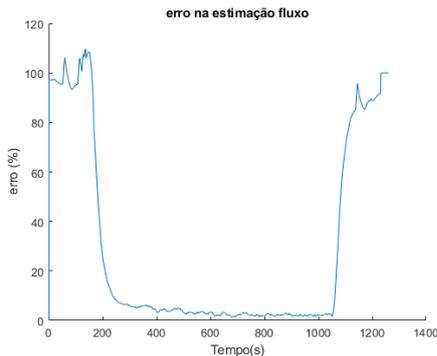


Figura 9 – Diferença percentual entre o fluxo estimado e o fluxo experimental.

Com uma rápida análise, é possível verificar que os erros de estimação do fluxo no começo e final do experimento foram incertos. Essa diferença provavelmente se dá devido ao fato de que os termopares utilizados possuem uma taxa de atualização muito grande, fazendo com que o valor calculado tenha um atraso na estimação.

Resultados experimento metal duro

Para este experimento, novamente, utilizou-se o MFE, no entanto devido as condições experimentais deste experimento, não é possível trata-lo como um problema unidimensional, sendo necessário a utilização de um modelo tridimensional. Para isso, a equação do Método da Função Especificada foi implementada no software MATLAB e o coeficiente de sensibilidade foi calculado de maneira numérica utilizando o software COMSOL Multiphysics por meio da equação:

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta T}{\Delta q}$$

Os resultados obtidos para o fluxo de calor estimado e o fluxo de calor experimental foram plotados na Figura 10. Além disso, a diferença entre o valor experimental e o valor calculado foram plotados na Figura 11.

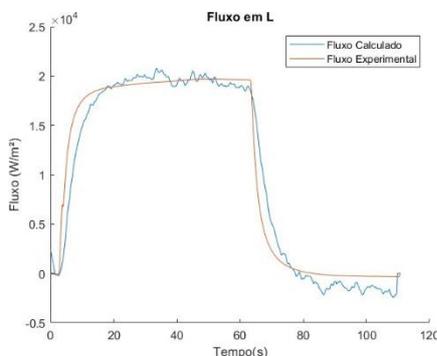


Figura 10 - Fluxos de calor estimados na superfície da amostra de metal duro pelo MFE.

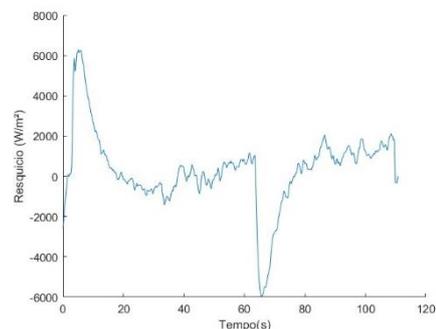


Figura 11 – Diferença entre o fluxo estimado e o fluxo experimental.

Utilizando destes resultados, é possível afirmar que o experimento foi conduzido de maneira correta e que o método é adequado para esse tipo de problema, visto que os erros de estimação estão dentro dos limites aceitáveis.

Conclusões

Ao final, conclui-se que o experimento envolvendo o PVC foi um sucesso no que diz respeito à assertividade na execução, escolha das equações de estimação e resultados obtidos.

O experimento envolvendo a amostra de alumínio obteve erros desproporcionais no começo e final do experimento, provavelmente devido a problemas durante a produção experimental.

O experimento envolvendo a amostra de metal duro obteve bons resultados, garantindo a aplicação do método em problemas tridimensionais e sujeito a condições de contorno mais complexas.

Por fim, conclui-se que todos os experimentos foram essenciais para o aprendizado de soluções numéricas para problemas de transferência de calor, sendo uma experiência ímpar para a preparação em possíveis experimentos mais complexos no futuro. Ademais, os programas utilizados podem ser adaptados para outros experimentos, possibilitando a utilização dos métodos em problemas mais complexos.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal de Itajubá e ao Instituto de Engenharia Mecânica pela estrutura fornecida durante a realização do trabalho.

Agradeço, também, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de iniciação científica.

Referências

- BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. **Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems**. New York: Wiley Interscience Publication, 1985.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT D. P.; BERGMAN T. L.; LAVINE A. S. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. Tradução: Eduardo M. Queiroz; Fernando L. P. Pessoa. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.