TEORIA QUALITATIVA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Adalberto Ferreira de Sá[1] (IC), Ingrid Sofia Meza Sarmiento[1] (PQ)
[1]*Universidade Federal de Itajubá (Unifei).*

Palavras-chave: Equações diferenciais. Existência e unicidade de soluções. Vibrações mecânicas.

Introdução

No presente projeto de pesquisa estudamos a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Por se tratar de uma das áreas mais aplicáveis da Matemática, surge o interesse no aprofundamento da sua teoria.

O objetivo principal desta pesquisa foi desenvolver um arcabouço teórico suficientemente robusto para entender de um modo qualitativo as relações entre as Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações, principalmente na Mecânica. Tal pesquisa deixa claro que a teoria qualitativa permite induzir comportamentos de sistemas físicos de maneira mais precisa e concreta.

O método foi majoritariamente baseado em uma revisão bibliográfica a respeito do tema, juntamente com a apresentação semanal de seminários cobrindo os tópicos estudados na semana anterior.

Metodologia

Esta pesquisa foi iniciada com uma revisão bibliográfica das aplicações básicas mais recorrentes em livros didáticos, mais especificamente, aquelas que geralmente são apresentadas em livros que introduzem as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). Este trabalho reúne: uma aplicação na Geometria, mostrando como podemos, por meios das EDO's, encontrar uma curva com uma propriedade específica; uma aplicação física, determinando a cinemática de um corpo sobre o qual está agindo a força peso e uma força de arrasto; uma aplicação na química, onde encontramos uma solução para a quantidade instantânea de massa para o decaimento de uma substância radioativa; e uma aplicação na determinação do crescimento populacional.

Em seguida, iniciamos uma revisão da teoria básica das Equações Diferenciais Ordinárias, começamos com as lineares de primeira ordem, passamos para as homogêneas, continuamos com a revisão dos métodos mais famosos para encontrar soluções particulares, a saber, o método dos coeficientes a determinar e o da variação de parâmetros. Estudamos também algumas EDO's especiais, mais precisamente, a EDO de Bernoulli e a de Ricatti. Seguidamente, as Equações Diferenciais de ordem superior e finalizamos a revisão com o estudo de um método simples e totalmente analítico que nos permite transformar Equações Diferenciais de qualquer ordem num Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de ordem um.

Após essa revisão, foi iniciada uma preparação para entender a demonstração do principal teorema das Equações Diferenciais Ordinárias: o Teorema de Picard. Nesse período, alguns lemas foram estudados, muitos deles são facilmente encontrados em livros de Análise Real. Também foi estudada a demonstração do Teorema do Ponto Fixo (de Banach), com isso, iniciamos com o Método de Picard (ou sequência de Picard) como motivação, e prosseguimos para o próprio Teorema de Picard.

Demonstrado o Teorema de Picard, o passo seguinte foi iniciar o estudo dos Sistemas de EDO's. Para isso, um estudo um pouco mais detalhado de Álgebra Linear foi necessário, principalmente para melhor compreender as manipulações relacionadas aos Sistemas Lineares e as operações com os autovalores e autovetores, tão necessários para o estudo dos Sistemas de EDO's. Os resultados mais essenciais de Álgebra Linear foram adicionados ao relatório, visando reunir as partes mais básicas de toda a argumentação desenvolvida. Estudamos os Sistemas Lineares de EDO's com coeficientes constantes, tanto o caso homogêneo quanto o não homogêneo. Finalizamos essa parte mais geral como o estudo do método da variação de parâmetros, generalizado para Sistemas de EDO's de qualquer ordem.

Na sequência, começamos a nos aprofundar nos Sistemas Lineares Planares de EDO's, conceitos como retrato de fase e campo de direções foram compreendidos nessa etapa. Fizemos o estudo dos três possíveis casos: autovalores reais e distintos, reais e iguais, e complexos conjugados. Em seguida, estudamos um método para transformar qualquer matriz de coeficientes constantes numa matriz simples que nos levará a um dos três casos possíveis. Não foi feita uma demonstração formal, mas

trata-se do Teorema da Forma Canônica de Jordan para matrizes quadradas de ordem dois. Prosseguimos na determinação do comportamento do sistema, nos baseando unicamente no traço e no determinante da matriz do Sistema Linear Planar de EDO’s. Alguns exercícios foram resolvidos, fora todos os exemplos resolvidos e distribuídos em cada seção.
Nesse ponto, meus estudos paralelos, mais especificamente, o das Vibrações Mecânicas, chamaram-me a atenção para o fato de que o comportamento de sistemas que vibram com um grau de liberdade pode ser totalmente determinado por meio da análise do traço e do determinante da matriz do Sistema Linear de EDO’s. Sendo esse um resultado perfeitamente válido quando o sistema é homogêneo, e, a depender, também como uma boa aproximação para sistemas não homogêneos. Com isso em mente, iniciamos o estudo das vibrações: livres não-amortecidas, livres amortecidas, forçadas não-amortecidas e forçadas amortecidas. Tal estudo de como a teoria qualitativa das EDO’s pode ser aplicada às Vibrações Mecânicas foi tema de uma apresentação que fiz no Seminário de Matemática Bacharelado do IMC.

Por fim, encerramos os estudos para esta pesquisa com uma introdução aos Sistemas Não Lineares e seus equilíbrios. Dentro desses tópicos, foram parcialmente abordados os sistemas dinâmicos suavemente contínuos, a dependência contínua das soluções e a equação variacional. Com relação aos equilíbrios, foi analisada, em alguns exemplos, a similaridade (local) entre o sistema não linear e o linear.

Resultados e discussão

Sejam $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções quaisquer. Dizemos que um sistema do tipo

$$\begin{cases} x' = f(t,x,y) \\ y' = g(t,x,y) \end{cases}$$

é um Sistema Planar. Este trabalho focou nos Sistemas Planares Lineares Planares Autônomos, que são do seguinte tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

com a, b, c, d números reais.
Como uma tentativa inicial de entender tais sistemas, começamos representando o lado direito da igualdade como uma aplicação geradora de um campo de vetores. Se considerarmos a aplicação $(x,y) \to (-y,x)$, teremos o campo de vetores apresentado na Figura 1.

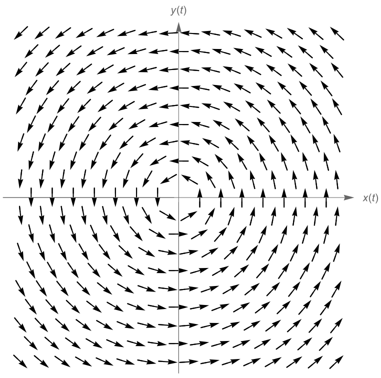

Figura 1 – Campo de vetores

O principal resultado foi provar de maneira formal todos os comportamentos possíveis para Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias lineares de segunda ordem.

O sistema (1) pode ser escrito em forma matricial, teremos

$$\boldsymbol{X}' = A\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

É possível utilizar a Álgebra Linear para resolvermos este problema, basta encontrarmos os autovalores e os autovetores da transformação linear associada à matriz A. Por ser relativamente extensa, esta última afirmação é totalmente desenvolvida apenas no relatório.

O diagrama de bifurcação mostrado na Figura 2 define todas as possibilidades para o sistema (1).

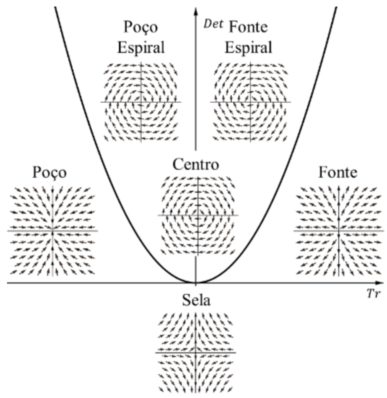

Figura 2 - Diagrama de bifurcação

Desenvolvendo a matriz A, concluímos que os autovalores dependem unicamente do traço (T) e do determinante (D) de A, assim, podemos obter a Figura 2. Passaremos agora a explicar o diagrama de bifurcação.

Quando temos $T^2 - 4D > 0$, se $D < 0$, então teremos o caso chamado Sela; se $D > 0$ e $T < 0$ teremos um Poço; sendo $D > 0$ e $T > 0$ o campo de vetores será uma Fonte.

Caso tenhamos $T^2 - 4D < 0$, podemos ter um Centro, caso $T = 0$; ou um Poço Espiral, se $T < 0$, caso contrário, teremos uma Fonte Espiral, para $T > 0$.
Sendo $T^2 = 4D$ teremos os dois possíveis casos para os autovalores repetidos, a saber, ou conseguiremos encontrar dois autovetores linearmente independentes ou não.

No quesito aplicações, podemos estudar as vibrações mecânicas de um ponto de vista dos Sistemas Planares Lineares. Consideramos inicialmente um grau de liberdade, e em seguida podemos generalizar de maneira direta, embasando-nos na teoria geral para Sistemas Lineares de Equações Diferenciais.

Conclusões

Em síntese, grande parte dos porquês que ocasionalmente surgem na mente dos alunos mais curiosos durante um primeiro curso sobre Equações Diferenciais foram sanados, a teoria que nos permite encontrar soluções analíticas é extremamente rasa quando a comparamos com a qualitativa. Ademais, uma compreensão mais profunda a respeito da Análise Real, da Álgebra Linear e da própria Matemática na totalidade faz parte do resultado desta pesquisa.

Agradecimentos

A Deus, por tudo. A minha orientadora, pelas instruções e correções. A Unifei, pelo ambiente propício aos estudos. E a Fapemig, pelo financiamento da bolsa.

Referências

BRAUN, M. **Differential Equations and Their Applications:** An Introduction to Applied Mathematics. 4. ed. Berlin: Springer, 2013.

DOERING, C.; LOPES, A. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LADEIRA, L. A.; CASSAGO JUNIOR, H. **Equações Diferenciais Ordinárias**. São Paulo: Notas de aula, 2011.

MEADE, D. B.; DIPRIMA, R. C.; BOYCE, W. E. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 11. ed. New Jersey: Wiley, 2017.

HIRSH, M. W.; DEVANEY, R. L.; SMALE, S. **Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos**. 2. ed. California: Elsevier, 2004.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

HIBBELER, R. C. **Estática, Mecânica para Engenharia**. 10. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. **Curso de Análise vol. 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022.

SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.