ASPECTOS GEOMÉTRICOS DO ESPAÇO $\mathbb{S}^2$ E SEUS SUBGRUPOS DISCRETOS DE ISOMETRIA

Luiz Felipe S. Gonzaga[1] (IC), Prof. Dr. Leandro G. Gomes[1] (PQ)
[1]*Universidade Federal de Itajubá*

Palavras-chave: Esfera. Geometria esférica. Subgrupos discretos de isometria.

Introdução

Nesse estudo abordaremos alguns aspectos importantes e os subgrupos discretos de isometria na geometria esférica, uma das geometrias de curvatura constante que emergiu como uma área de estudo matemático que contraria o quinto postulado de Euclides, ou seja, uma geometria não-euclidiana.

Este estudo se propõe a investigar os subgrupos discretos de isometrias da esfera, analisando suas inter-relações com estruturas geométricas familiares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Inicialmente, exploramos conceitos e definições cruciais para o desenvolvimento do estudo, examinando os grupos fundamentais e suas ações sobre a esfera.

Avançando, abordamos aspectos essenciais da geometria na esfera, incluindo métricas, comprimentos de curva, áreas e relações métricas, proporcionando uma compreensão profunda das características intrínsecas desse espaço curvo. Destaca-se aqui a riqueza de fenômenos geométricos que surgem da curvatura constante da esfera, distinta das formas planas encontradas na geometria euclidiana.

Por fim, ao explorar as ações dos grupos de isometrias sobre a esfera, desvendamos as propriedades topológicas deste espaço curvo. Esta investigação ressalta não apenas a relevância da geometria esférica como uma ponte entre diferentes áreas da matemática, mas também sua aplicabilidade multidisciplinar.

Metodologia

A metodologia utilizada nesta pesquisa envolveu um estudo de conceitos e definições matemáticas necessárias para a introdução no conteúdo. Para conduzir essa investigação teórica, estabelecemos critérios para a seleção das obras consultadas, priorizando materiais que apresentassem relevância, autoridade na área de estudo e clareza nos conteúdos abordados. Esses critérios incluíram a avaliação do impacto das publicações, a credibilidade dos autores e a atualidade das informações. Além disso, foram métodos de análise para examinar os conteúdos dos livros, artigos e materiais didáticos, focando nos tópicos de maior relevância acerca do conteúdo e a síntese das principais contribuições para o entendimento dos conceitos em questão. A combinação dessas abordagens permitiu uma melhor internalização dos conceitos estudados, contribuindo assim para um aprendizado sólido.

Resultados e discussão

Embora o trabalho não apresente novos resultados empíricos, é crucial refletir sobre o conhecimento adquirido ao longo da pesquisa. O estágio de Iniciação Científica proporcionou uma imersão nos conceitos fundamentais, o que ampliou significativamente a compreensão do aluno sobre o tema.

Futuras investigações poderão explorar a aplicação desses conceitos em diversas áreas, como a análise de estruturas em física teórica. Além disso, a compreensão dos subgrupos discretos de isometria poderá abrir caminho para pesquisas relacionadas a simetrias e padrões em diferentes contextos matemáticos. A intenção é que, sob a orientação do professor, o aluno utilize esses conhecimentos como base para desenvolver projetos de pesquisa mais complexos, contribuindo para o avanço do entendimento na área.

Conclusões

Este estudo representa um importante passo na conexão entre conceitos básicos e avançados, centrando-se na Geometria Esférica e suas múltiplas facetas. A análise dos subgrupos discretos de isometrias da esfera não apenas revela a riqueza e complexidade dessa geometria, mas também sublinha sua relevância histórica e contemporânea.

As conexões entre os subgrupos de isometrias, os polígonos regulares em $\mathbb{R}^2$ e os sólidos de Platão em $\mathbb{R}^3$ (Figura 1) destacam a profundidade das relações geométricas. A investigação das ações desses grupos sobre a esfera proporciona uma visão mais clara das propriedades geométricas e topológicas desse espaço, enriquecendo nossa compreensão das estruturas

matemáticas subjacentes.

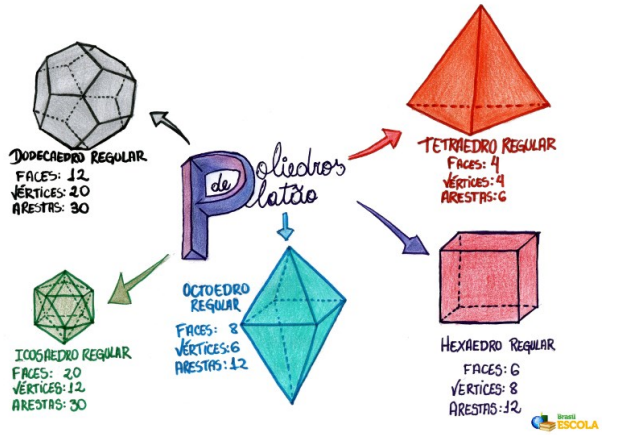

Figura 1 – Os cinco sólidos de Platão. Adaptado de: Brasil Escola. Disponível em: brasilescola.uol.com.br.

Além disso, a importância deste estudo se estende a aplicações interdisciplinares. Os conceitos explorados podem ser aplicados em diversas áreas, como na modelagem de superfícies em física e na otimização de algoritmos em computação gráfica. Para pesquisas futuras, sugere-se a exploração de novas classes de isometrias e suas interações, o que poderá abrir caminhos para novas descobertas e inovações em campos como a física teórica. Assim, este trabalho não apenas fundamenta o conhecimento adquirido, mas também serve como base para investigações que podem contribuir significativamente para o avanço do conhecimento nas ciências exatas.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, aos meus pais, Luiz Antonio e Rosemarie, a minha irmã Mariana, a minha esposa, Nátaly, ao meu orientador Prof. Leandro, aos meus amigos e à UNIFEI. Todos esses envolvidos foram e são pilares muito importantes durante a pesquisa desta Iniciação Científica.

Referências

DORIA, Celso Melchiades. Geometrias: euclidiana, esférica e hiperbólica. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2019.

LANG, Serge. Undergraduate algebra. Springer, 2005.

DOMIGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. Álgebra moderna. São Paulo, SP: Saraiva, 2018.

BEARDON, Alan F. The geometry of discrete group. Springer-Verlag, GTM 91, 1982.

STILLWRLL, John. Naive lie theory: undergraduate texts in mathematics. Springer, 2008.

REIS, Francisco I. Coordenadas esféricas. Geogebra, 2019. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/u7wpaxdb>. Acesso em: 24 de maio de 2024.