

## OSCILADORES ACOPLADOS AMORTECIDOS E FORÇADOS UNIDIMENSIONAIS: UMA ABORDAGEM MATRICIAL

Leonardo Souza Bustamante<sup>1</sup> (IC), Fabricio Augusto Barone Rangel (PQ)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Itajubá.

**Palavras-chave:** Oscilador harmônico. Acoplamento. Amortecimento. Força Externa. Solução analítica.

### Introdução

Um dos problemas mais fundamentais da física é o oscilador harmônico, cuja importância deriva da sua ampla aplicabilidade em diversos problemas mecânicos. De fato, muitos problemas na mecânica podem ser reduzidos ao simples caso do oscilador harmônico, cuja solução é bem conhecida. No entanto, ao considerarmos oscilações acopladas, surgem problemas um pouco mais complexos, embora ainda solucionáveis utilizando métodos convencionais, como explorado por Nussenzveig (2010). Quando adicionamos uma força externa ao movimento acoplado, a abordagem necessária muitas vezes se torna mais complicada, particularmente para estudantes no início da graduação, requerendo métodos como o formalismo da função de Green (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2007, p. 447)

O objetivo principal deste projeto é desenvolver uma solução analítica que empregue conceitos mais acessíveis para estudantes de graduação. Inspirados pelo trabalho de referência (FLORES-HIDALGO; BARONE, 2011), que simplifica a solução do oscilador harmônico forçado, buscamos encontrar uma solução matricial para o caso de oscilações acopladas que faça uso apenas de conceitos básicos do início da graduação.

Além de simplificar a compreensão e resolução de problemas de oscilações acopladas e forçadas, este projeto também visa auxiliar futuros estudos sobre campos escalares, oferecendo uma abordagem que pode ser adaptada para explorar sistemas mais complexos. Dessa forma, proporcionaremos tanto uma introdução aos métodos analíticos utilizados na física teórica quanto uma base sólida para investigações futuras em outras áreas da física.

### Metodologia

Utilizando o cálculo de pequenas oscilações para duas partículas, como o encontrado na literatura (MARION; THORNTON, 2011, p. 420), para representar um sistema de duas massas e três molas, podemos adicionar uma força externa e um amortecimento a cada uma das

massas. Considerando as massas iguais, para simplificar os cálculos, temos a seguinte equação que descreve um oscilador acoplado amortecido e forçado:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + \frac{k_1+k_l}{m} x_1(t) - \frac{k_l}{m} x_2(t) + \frac{\gamma_1}{m} \dot{x}_1(t) &= \frac{F_1(t)}{m} \\ \ddot{x}_2(t) + \frac{k_2+k_l}{m} x_2(t) - \frac{k_l}{m} x_1(t) + \frac{\gamma_2}{m} \dot{x}_2(t) &= \frac{F_2(t)}{m} \end{aligned} \quad (1)$$

Na qual,  $k_l$  representa a constante elástica da mola que conecta as duas partículas, enquanto  $k_1$  e  $k_2$  representam as constantes elásticas das molas que ligam cada partícula à parede. Considerando que os coeficientes de amortecimento são iguais,  $\gamma_1 = \gamma_2$ , para simplificar os cálculos, podemos escrever essa equação de forma matricial, sendo representada pela seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_l}{m} & -\frac{k_l}{m} \\ -\frac{k_l}{m} & \frac{k_2+k_l}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_1(t)}{m} \\ \frac{F_2(t)}{m} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Desta forma, podemos representar as matrizes da seguinte forma:

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (3)$$

Que é equivalente à:

$$(D^2 + \mathbf{\Gamma}D + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (4)$$

onde  $D$  é o operador diferencial que representa a derivada temporal.

Com o objetivo de encontrar uma solução válida para o sistema de equações, definimos uma matriz  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , na qual representam as raízes da equação quadrática representada pela equação (4), como demonstra a seguinte equação:

$$(D - \mathbf{A})(D - \mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (5)$$

Para definir quem são essas matrizes, expandimos a equação (5) e comparamos o resultado com a equação (4),

levando ao seguinte sistema de equações matriciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= -\mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{K} \end{aligned} \quad (6)$$

Utilizando o software Mathematica, encontramos os termos das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  em função dos termos de  $\mathbf{\Gamma}$  e  $\mathbf{K}$  através da equação (6). Assim, as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1\varphi}{2mc_1} & \frac{b_2\varphi_2}{2mc_2} \\ \frac{b_2\varphi_2}{2mc_2} & -(\gamma+\varphi) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1\varphi}{2mc_1} & \frac{-b_2\varphi_2}{2mc_2} \\ \frac{-b_2\varphi_2}{2mc_2} & -\gamma+\varphi \end{pmatrix} \quad (8)$$

Considerando as simplificações  $k = k_1 - k_2$ ,  $k_0 = k_1 + k_2$  e  $a_2^2 = \gamma^4 - 4\gamma^2 (k_0 + 2k_l)m + 16(k_1 k_2 + k_0 k_l)m^2$  para reduzir a complexidade dos termos, temos que os termos de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são:

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma^3 k + 4\gamma (k_2^2 + k_2 k_l + k_l^2 - k_1(k + k_l))m \\ b_1 &= 4k_l^2 m - k a_2 \\ b_2 &= k_l(4k_0 m - \gamma^2 - a_2) \\ c_1 &= -\gamma^2 k - 4(k_2^2 + k_2 k_l + k_l^2 - k_1(k_2 + k_l))m \\ c_2 &= \gamma^2 k + 4(k_2^2 + k_2 k_l + k_l^2 - k_1 k_0)m \\ \varphi^2 &= \frac{\gamma^2(k^2 + 2k_l^2) - 4(k^2 k_2 + k^2 k_l - (k_1 - 3k_2)k_l^2 + 2k_l^3)m - 2k_l^2 a_2}{k^2 + 4k_l^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Desta forma, baseando-se no mesmo princípio utilizado por Flores-Hidalgo e Barone (2011), mas considerando o caso matricial, temos a seguinte relação:

$$(\mathbf{D} - \mathbf{C})\mathbf{X} = e^{\mathbf{C}t}\mathbf{D}(e^{-\mathbf{C}t}\mathbf{X}) \quad (10)$$

Essa relação permite realizar substituições na equação (5), resultando em:

$$(\mathbf{D} - \mathbf{A})e^{\mathbf{B}t}\mathbf{D}(e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{X}) = \mathbf{F} \quad (11)$$

Aplicando a relação descrita pela equação (10) na equação (11):

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{D}(e^{\mathbf{A}t + \mathbf{B}t}\mathbf{D}(e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{X})) = \mathbf{F} \quad (12)$$

Utilizando algumas manipulações e integrando em respeito ao tempo, considerando a condição inicial  $t_0$ , temos:

$$e^{\mathbf{A}t + \mathbf{B}t}\mathbf{D}(e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{X}) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}t'}\mathbf{D}t' \quad (13)$$

Realizando mais algumas manipulações e integrando novamente em respeito ao tempo, temos a seguinte solução que descreve  $\mathbf{X}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= e^{\mathbf{B}t} \int_{t_0}^t e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B})t''} \int_{t_0}^{t''} e^{-\mathbf{A}t'} \mathbf{F}(t') dt' dt'' \\ &+ e^{\mathbf{B}t} [\mathbf{A} - \mathbf{B}]^{-1} (e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B})t} - e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B})t_0}) e^{-\mathbf{A}t_0} (\mathbf{V}_0 - \mathbf{B}\mathbf{X}_0) + e^{\mathbf{B}t - \mathbf{B}t_0} \mathbf{X}_0 \end{aligned} \quad (14)$$

Em que  $\mathbf{X}_0$  representa as posições iniciais e  $\mathbf{V}_0$  representa as velocidades iniciais.

### Resultados e discussão

A equação (14) representa a solução final. Para testar e visualizar melhor o resultado obtido, consideramos o caso em que ambas as partículas iniciam em repouso e a primeira partícula é submetida a um impulso, desencadeando o movimento.

Para representar esse caso, consideramos  $t_0 = 0$  e  $\mathbf{F}(t') = \delta(t' - t_0)2\mathbf{\Omega}$ , na qual a delta de Dirac representa o impulso inicial e  $\mathbf{\Omega}$  um vetor que representa a intensidade aplicada na primeira partícula, expressa por uma constante arbitrária  $\alpha$ , representado por:

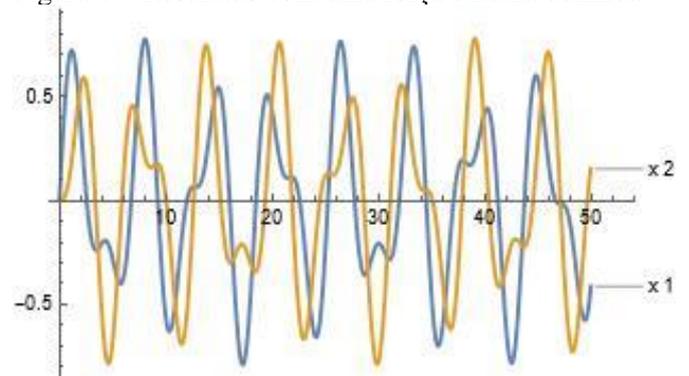
$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Sendo assim, a equação de movimento para este caso:

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{B}t} [\mathbf{A} - \mathbf{B}]^{-1} (e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B})t} - \mathbf{I}) \mathbf{\Omega} \quad (16)$$

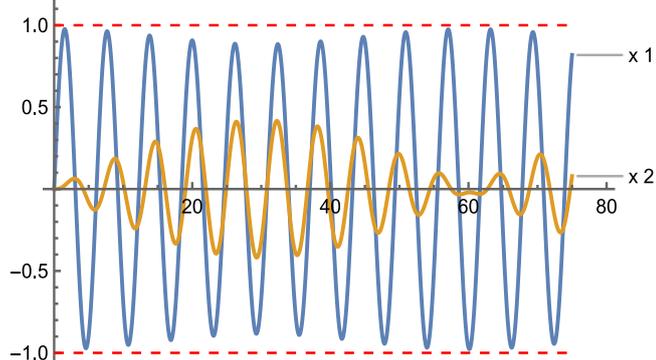
Para visualizar esse resultado, traçamos o gráfico a seguir, assumindo  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_l = 1$ ,  $m = 1$  e  $\gamma = 0$ , eliminando o amortecimento com o objetivo de visualizar como as duas massas oscilam ao longo do tempo com a energia total constante:

Figura 1 – Resultado com uma força externa definida



Embora o gráfico mostre corretamente as oscilações de  $x_1$  e  $x_2$ , torna-se um pouco difícil visualizar como o movimento iniciado na primeira massa afeta a segunda. Portanto, geramos um novo gráfico, reduzindo o acoplamento entre as partículas para  $k_1 = 0.05$ , permanecendo  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 1$ .

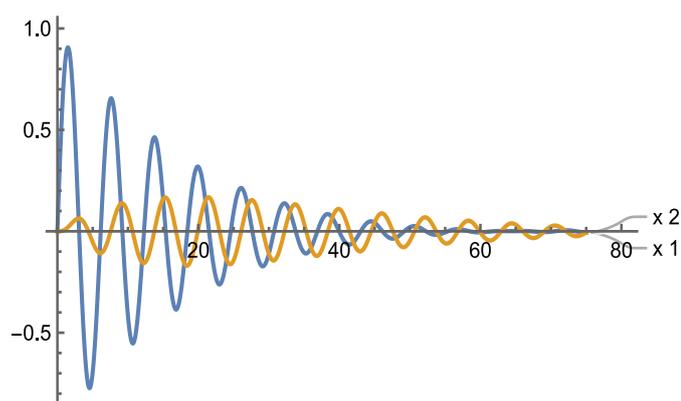
Figura 2 – Resultado com uma força externa definida e acoplamento fraco



Agora, é possível observar como a oscilação da primeira massa se inicia e, ao longo do tempo, transfere energia para a segunda massa, gerando movimento por meio do acoplamento. Embora neste trabalho tenhamos abordado o fenômeno de forma qualitativa, uma análise mais aprofundada da energia, incluindo o impacto do amortecimento e potenciais gráficos representativos, será desenvolvida em trabalhos futuros.

Acrescentando o amortecimento ao sistema da Figura 2, com o valor de  $\gamma = 0.1$ , observamos como isso influencia o comportamento das oscilações, representado pela Figura 3. O termo de amortecimento resulta na dissipação de energia ao longo do tempo, afetando a transferência de energia entre as massas e levando a uma diminuição gradual da amplitude das oscilações.

Figura 3 – Resultado com uma força externa definida, acoplamento fraco e amortecimento



## Conclusões

Por fim, estudamos o caso de oscilações acopladas e alcançamos o objetivo principal de aplicar o método realizado por Flores-Hidalgo e Barone (2011) ao caso de dois osciladores acoplados, amortecidos e forçados. Além disso, aplicamos a solução encontrada a um exemplo simples e verificamos graficamente o que ela representa, possibilitando o seu desenvolvimento em trabalhos futuros.

Com este trabalho, concluímos tudo o que era esperado para o nosso projeto de Iniciação Científica. Pretendemos submeter um artigo didático a um periódico de circulação internacional, incluindo uma análise da energia do sistema com uma abordagem matricial. Esse estudo sobre a energia do sistema, apesar de sua relevância, não é trivial como pode parecer à primeira vista e requer tempo e uma abordagem cautelosa.

## Agradecimentos

Agradeço ao CNPQ pelo auxílio financeiro fornecido por meio do programa PIBIC e a UNIFEI pela infraestrutura fornecida.

## Referências

- ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J.; HARRIS, Frank E.** *Métodos matemáticos para físicos*. Tradução de Arlete Simille Marques, 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 960 p. ISBN 13: 978-85-352-2050-6.
- FLORES-HIDALGO, G.; BARONE, F. A.** The one-dimensional damped forced harmonic oscillator revisited. *European Journal of Physics*, v. 32, n. 2, p. 377, jan. 2011. DOI: 10.1088/0143-0807/32/2/010.
- MARION, J. B.; THORNTON, S. T.** *Classical dynamics of particles and systems*. 5. ed. New York: Cengage Learning, 2003. 660 p. ISBN 13: 978-0534408961
- NUSSENZVEIG, H. M.** *Curso de Física Básica. Fluidos, Oscilações - Volume 2*. 4. ed. São Paulo: Ed. Blucher, 2002. 344 p. ISBN 13: 978-8521202998