

Um estudo sobre a dinâmica de sistemas binários

Gabriel de Almeida Porto (IC)¹, Eduardo Henrique Silva Bittencourt (PQ)¹¹ Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)**Palavras - Chave:** Geometria diferencial. Relatividade Geral. Ondas Gravitacionais.**Introdução**

Atualmente a teoria que melhor descreve a interação gravitacional é a relatividade geral, proposta em 1915 por Albert Einstein ela descreve a gravitação como uma curvatura do espaço-tempo, no entanto para descrever esta interação matematicamente devemos trocar o espaço Euclidiano da teoria Newtoniana por variedades diferenciáveis munidas com uma métrica que descreve um espaço curvo. Assim neste trabalho buscamos compreender alguns elementos de geometria Riemanniana, como a construção da operação de diferenciação (derivada covariante) nestes espaços e como isso nos permite construir objetos que descrevem a curvatura da nossa variedade e como estes objetos estão relacionados com a métrica, campo fundamental da relatividade geral (Adler, 1965).

Nosso principal objetivo é estudar as equações de campo de Einstein em um regime linear, que fornecem a previsão teórica das ondas gravitacionais, proposta em 1916. As ondas gravitacionais são perturbações na curvatura do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz, geradas por eventos astrofísicos violentos, como a fusão de buracos negros e estrelas de nêutrons. Neste estudo, analisamos aspectos cruciais das soluções de uma equação de onda, como a propagação de ondas no vácuo e a geração de ondas por uma fonte (Barausse, 2023).

Metodologia

Para o estudo da relatividade geral foi preciso estudar, dentro da geometria diferencial, objetos que sejam capazes de descrever a curvatura do espaço-tempo, para isso foi estudado a operação de diferenciação em variedades munidas com uma métrica, então definimos um campo vetorial λ_a definido sobre uma região U pertencente a uma variedade M coberta por um sistema de coordenadas e assim definimos a **derivada covariante**¹ (Foster, 2006) como,

$$\lambda_{a;b} = \lambda_{a,b} - \Gamma_{ab}^d \lambda_d, \quad (1)$$

a derivada covariante segue das seguintes propriedades:

¹ A derivada covariante será denotada por um "; entre os índices ($\lambda_{a;b}$) e a derivada parcial será denotada por uma ", entre os índices ($\lambda_{a,b} \equiv \partial_b \lambda_a$).

1. Linearidade: $(\alpha\lambda_a + \beta\mu_c)_{;b} = \alpha\lambda_{a;b} + \beta\mu_{c;b}$;
2. Regra de Leibniz: $(\lambda_a\mu_c)_{;b} = \lambda_{a;b}\mu_c + \lambda_a\mu_{c;b}$;
3. Para um campo escalar recupera - se a derivada parcial usual: $\phi_{;b} = \phi_{,b}$;
4. Aumenta a ordem do tensor; se aplicamos a derivada covariante em um tensor de ordem (r, s) obtém - se um tensor de ordem $(r, s + 1)$,

diferenciando mais uma vez o campo vetorial λ_a e como a derivada covariante segunda não comuta ($\lambda_{a;bc} \neq \lambda_{a;cb}$), usamos desta propriedade para encontrarmos o tensor de curvatura de Riemman,

$$R_{abc}^d = \Gamma_{ac,b}^d - \Gamma_{ab,c}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d, \quad (2)$$

o tensor de curvatura satisfaz a identidade de Bianchi,

$$R_{bcd;e}^a + R_{bde;c}^a + R_{bec;d}^a = 0, \quad (3)$$

com o tensor de curvatura podemos construir por contração o tensor de Ricci e o escalar de curvatura,

$$R_{ab} \equiv R_{abc}^c = \Gamma_{ac,b}^c - \Gamma_{ab,c}^c + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^c - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^c, \quad (4)$$

$$R \equiv g^{ab} R_{ab}. \quad (5)$$

A partir da identidade de Bianchi é possível deduzir o tensor de Einstein que posteriormente será usada para construção das equações de campo da relatividade geral, o tensor de Einstein é da forma,

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}, \quad (6)$$

onde G_{ab} é simétrico e sua divergência é $G^{ab}_{;b} = 0$.

Definido os objetos necessários para descrever a curvatura do espaço-tempo, precisamos agora definir o objeto para descrever a matéria, energia e momento no espaço-tempo, para isso usaremos o tensor momento-energia. Para isso vamos considerar um fluido perfeito

descrito pelos campos escalares ρ e p , que são respectivamente a densidade e a pressão do fluido. Vamos considerar um campo de observadores tal que suas velocidades sejam $u^\mu = (c, \vec{0})$, então o tensor momento-energia será da forma (Foster, 2006),

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu}, \quad (7)$$

que é um tensor do tipo $(2, 0)$ simétrico com divergência nula. A equação (7) é relativística, se tomarmos o limite de baixas velocidades e de pressões muito menores que a densidade obtemos as equações clássicas,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p, \quad (9)$$

no entanto estamos considerando a métrica de Minkowski, generalizando isto para um espaço-tempo curvo com métrica $g_{\mu\nu}$ usamos o princípio do acoplamento mínimo para trocar as derivadas parciais pelas derivadas covariantes e assim obtemos,

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (10)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (11)$$

Agora temos os objetos necessários para montar as equações de campo de Einstein, que relacionará o tensor momento-energia com o tensor de Einstein, isto é, uma equação que nos dá uma relação entre matéria, energia e momento e a curvatura,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (12)$$

onde k é uma constante que vale $\frac{8\pi G}{c^4}$.

Considerando um regime de campo fraco descrito pela equação ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$), onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e usar que $h_{\mu\nu}$ e suas derivadas são muito pequenos e portanto seus produtos podem ser desprezados e usaremos o $\eta_{\mu\nu}$ para abaixar e levantar os índices. A inversa da métrica é da forma,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (13)$$

é fácil ver isso usando a definição da inversa da métrica ($g_{\beta\nu}g^{\alpha\nu} = \delta_\beta^\alpha$). Temos que o símbolo de Christoffel com $\eta^{\mu\nu}$ já contraído é da forma,

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2}(h_{\sigma,\nu}^\mu + h_{\nu,\sigma}^\mu - h_{\nu\sigma}^{\mu,\mu}), \quad (14)$$

substituindo a equação acima no tensor de Ricci nos obtemos,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{,\mu\nu} - h_{\nu,\alpha\mu}^\alpha - h_{\mu,\alpha\nu}^\alpha + h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha), \quad (15)$$

usamos a equação acima para obter o escalar de Ricci,

$$R = h_{,\alpha}^\alpha - h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta}, \quad (16)$$

substituindo o escalar de Ricci e as equação (15) em (12) obtém-se a equação abaixo definindo $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$,

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + (\eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\nu,\alpha\mu}^\alpha - \bar{h}_{\mu,\alpha\nu}^\alpha) = 2kT_{\mu\nu}. \quad (17)$$

Agora efetuamos uma transformação de calibre no sistema de coordenadas, de tal maneira que ele continue sendo do tipo cartesiano para que $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$,

$$x^{\mu'} \equiv x^\mu + \xi(x^\alpha), \quad (18)$$

logo a matriz jacobiana e sua inversa são da forma,

$$J_{\nu'}^{\mu'} \equiv \delta_\nu^\mu + \xi^{\mu}_{,\nu'}, \quad (19)$$

$$J_{\nu'}^\mu \equiv \delta_\nu^\mu - \xi^{\mu}_{,\nu'}, \quad (20)$$

assim obtemos que $\bar{h}_{\mu\nu}$ se transforma da seguinte forma,

$$\bar{h}^{\mu'\nu'} = \bar{h}^{\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu} + \eta^{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,\alpha}, \quad (21)$$

usamos as equações acima para encontrar a divergência de $\bar{h}_{\mu\nu}$ no novo sistema de coordenadas e obtemos,

$$\bar{h}^{\mu'\alpha}_{,\alpha} = \bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} - \xi^{\mu\alpha}_{,\alpha}, \quad (22)$$

usamos a liberdade de calibre para escolher ξ que satisfaça a seguinte condição,

$$\xi^{\mu\alpha}_{,\alpha} = \bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha}, \quad (23)$$

aplicamos o calibre escolhido na equação (17) e definindo $\square \equiv \square^2 = -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ obtemos

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}, \quad (24)$$

por fim obtemos que ao linearizar as equações de Einstein caímos numa equação de onda se, e somente se o calibre escolhido for satisfeito.

Resultados e discussão

A primeira solução a ser analisada é a que descreve uma onda gravitacional se propagando no vazio, isto é, $T_{\mu\nu} = 0$ (Barausse, 2023),

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (25)$$

uma das soluções para equação acima é de uma onda plana representada por,

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \mathcal{R}\{A^{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha)\}, \quad (26)$$

onde $\mathcal{R}$ denota a parte real da expressão, k^μ é o quadrivetor de onda e $[A^{\mu\nu}]$ é a matriz de amplitude. Da condição

de calibre e da equação (25) o quadritvetor de onda satisfaz,

$$A^{\mu\nu}k_\nu = 0. \quad (27)$$

Note que se $\bar{h}^{\mu\nu}$ é simétrico temos 10 componentes, vamos utilizar da condição de calibre para reduzir este número para apenas 2 componentes independentes. Para isso vamos considerar uma onda plana se propagando na direção x^3 , então o quadritvetor de onda é da forma,

$$k^\mu = (k, 0, 0, k), \quad (28)$$

da condição de calibre temos que ξ também satisfaz uma equação de onda,

$$\xi_{,\nu}^\mu = \mathcal{R}[\epsilon^\mu k_\nu \exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (29)$$

usamos das equações (21) e (29), podemos encontrar a matriz de amplitude no calibre definido,

$$A^{\mu'\nu'} = A^{\mu\nu} - \epsilon^\mu k^{\nu'} - k^\mu \epsilon^{\nu'} + \eta^{\mu\nu}(\epsilon^\alpha k_\alpha), \quad (30)$$

a partir daí é possível ver que $A^{0'0'} = A^{0'1'} = A^{0'2'}$ e $A^{1'1'} = A^{2'2'}$, se voltarmos no calibre obtemos que $A^{11} = -A^{22}$ e $A^{12} = A^{21}$. Assim temos um calibre transversal sem traço, assim introduzimos duas matrizes lineares de polarização, onde a matriz de amplitude será combinação linear delas,

$$[e_1^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$[e_2^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$A^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu} + \beta e_2^{\mu\nu}, \quad (33)$$

uma análise utilizando o quadritvetor de onda e as matrizes de polarização pode ser feita para ver os efeitos da onda gravitacional numa nuvem de partículas testes, tomando apenas uma partícula como referência e seu movimento em relação as outras será dada por,

$$\zeta^i = \xi^i - \frac{1}{2}\alpha \cos k(x^3 - x^0)(\xi^1, -\xi^2, 0). \quad (34)$$

Vamos agora analisar o caso em que existe uma fonte, isto é, $T_{\mu\nu} \neq 0$. Vamos considerar que temos uma distribuição de matéria como fonte e suas partículas tem velocidade muito menores que a da luz, e considerar pontos muito distantes da fonte, podemos escrever a solução como (Barausse, 2023),

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \left[\int T^{\mu\nu}(ct - r, \vec{x}) dV' \right], \quad (35)$$

se estivermos olhando para pequenas regiões muito afastadas da fonte, esperamos que a radiação da onda seja determinada apenas por suas componentes espaciais (T^{ij}),

usando o teorema de Gauss e que em baixas velocidades a componente é $T^{00} \approx \rho c^2$, então a equação (35) pode ser escrita como,

$$\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x}) = -\frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} \left[\int \rho x^i x^j dV \right]_{\tau_r}, \quad (36)$$

onde a integral é avaliada no tempo retardado $\tau_r \equiv (t - \frac{r}{c})$. Vamos agora considerar um cenário onde temos duas partículas A e B de mesma massa separadas por uma distância $2d$, efetuando um movimento em torno do eixo x^3 , o movimento das partículas é dado pela seguinte parametrização,

$$x^i = \pm(a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), 0), \quad (37)$$

como estamos lidando com duas partículas a integral da equação (36) se torna um somatória das duas partículas, considerando uma frequência constante ω , podemos escrever a referida equação na seguinte matriz,

$$[\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x})] = \frac{8GMa^2\omega^2}{c^4 r} \begin{bmatrix} \cos(2\omega\tau_r) & \sin(2\omega\tau_r) & 0 \\ \sin(2\omega\tau_r) & \cos(2\omega\tau_r) & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

por fim fica claro que obtemos uma onda gravitacional com uma frequência igual a 2ω . E para que seja possível detectar tais ondas devemos procurar por eventos catastróficos como sistemas binários de estrelas de nêutrons e buracos negros.

Conclusões

Abordamos neste trabalho as equações de campo de Einstein em um regime de campo fraco, onde é possível obter equações lineares do tipo onda. As equações de onda nos fornecem uma previsão das ondas gravitacionais, onde sua solução no vácuo prevê uma velocidade de propagação igual a da luz e como uma nuvem de partículas se configura ao ser atingida pela onda. Enquanto ao estudarmos a geração por duas partículas realizando um movimento circular nos permite encontrar uma solução que prevê ondas com frequências da forma 2ω .

Por fim o estudo teórico das ondas gravitacionais se constitui uma área muito interessante e ampla que vai do formalismo de um corpo efetivo para dinâmica de sistemas binários até o estudo das técnicas de detecção utilizada pelas grandes colaborações.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq, em particular, pelo auxílio financeiro fornecido por meio do programa PIBIC e a UNIFEI por toda infraestrutura fornecida.

Referências

- J. D. Nightingale, J. Foster, *A Short Course in General Relativity*, Springer, 2006.
- M. Bazin, M. Schiffer, R. Adler, *Introduction to general relativity*, McGraw - Hill Book Company, 1965.
- E. Barausse, *The physics of gravitational waves*, arXiv:2303.11713, 2023, Disponível em <https://arxiv.org/pdf/2303.11713>.