O ALGORITMO DE STRASSEN E A COMPLEXIDADE DE FORMAS BILINEARES

Fernando Andrade dos Santos¹ (IC), Rick Antônio Rischter¹ (PQ)

¹Universidade Federal de Itajubá

Palavras-chave: Multiplicação de Matrizes. Otimização. Tensores.

Introdução

Este trabalho explora a complexidade da multiplicação de matrizes, uma operação central em várias áreas da Matemática e da Ciência da Computação, com aplicações nos mais diversos ramos do conhecimento humano. O objetivo principal é analisar alguns dos primeiros avanços na otimização dessa operação, com foco nos resultados de Strassen (1969), Winograd (1971) e Laderman (1976), que trouxeram descobertas significativas para o progresso da área.

O método clássico para a multiplicação de duas matrizes $n \times n$ exige $O(n^3)$ operações, tornando-se pouco eficiente para n grande. Em 1969, Volker Strassen apresentou um algoritmo que inaugurou a multiplicação subcúbica, sendo o primeiro a desafiar a abordagem tradicional. Poucos anos depois, Shmuel Winograd mostrou qual é o número mínimo de multiplicações necessárias para o produto de matrizes 2×2 . Em 1976, Julian Laderman otimizou o produto de matrizes 3×3 .

A relevância do estudo feito está no impacto direto que tais algoritmos têm na eficiência computacional, essencial para áreas que dependem de grandes volumes de dados. A otimização da multiplicação de matrizes é vital para o desempenho de algoritmos em diversas aplicações, mostrando-se um tema de importância contínua na ciência e tecnologia.

Metodologia

A pesquisa desenvolvida foi estruturada em duas etapas principais: uma fase inicial coletiva, envolvendo estudos e seminários em grupo, e uma fase individual, voltada para a análise detalhada dos artigos estudados e a elaboração do relatório final.

Na primeira etapa, o estudo foi conduzido em grupo, juntamente com outros alunos de graduação e mestrado, cujos temas de pesquisa se relacionavam ao foco deste trabalho. O grupo estudou os conceitos

fundamentais da teoria dos tensores, utilizando como referência principal a obra “Tensors: Geometry and Applications”, de J. M. Landsberg. Esse estudo foi realizado por meio de seminários semanais, nos quais os alunos apresentavam e discutiam tópicos pertinentes aos seus temas de pesquisa. Durante o período, também foram propostos e resolvidos exercícios relacionados à multiplicação de matrizes e tensores, com revisão e orientação do professor.

Na segunda etapa, o trabalho individual teve como foco a análise detalhada dos artigos de Volker Strassen (1969), Shmuel Winograd (1971) e Julian D. Laderman (1976). Cada artigo foi examinado em profundidade, com ênfase nas contribuições desses autores para a otimização da multiplicação de matrizes. O processo incluiu a aplicação dos conceitos teóricos estudados anteriormente para compreender as estratégias de redução de complexidade introduzidas pelos algoritmos apresentados.

Durante o desenvolvimento do trabalho, encontros regulares com o orientador foram mantidos para discutir o progresso da pesquisa e solucionar questões teóricas. Na fase final, o relatório foi estruturado com base no aprendizado obtido ao longo da análise dos artigos, sendo revisado em conjunto com o orientador para assegurar a clareza e a precisão dos conceitos.

Resultados e discussão

Nesta pesquisa, analisamos a complexidade da multiplicação de matrizes a partir de diferentes abordagens, incluindo algoritmos clássicos e suas representações no contexto da teoria dos tensores. O primeiro resultado relevante foi a compreensão de que a multiplicação de matrizes pode ser vista como um problema de decomposição tensorial, onde o operador de multiplicação matricial é um tensor de terceira ordem. A complexidade do problema está associada ao posto deste tensor, que mede o número de multiplicações necessárias para calcular o produto de duas matrizes de tamanhos correspondentes. A

abordagem tensorial fornece uma perspectiva teórica fundamental para entender a complexidade da multiplicação matricial e guiar a busca por algoritmos mais eficientes.

O trabalho de Strassen, publicado em 1969, foi um marco histórico, ao apresentar um algoritmo que, pela primeira vez, quebrou a barreira de $O(n^3)$ multiplicações. Strassen ofereceu uma alternativa mais eficiente que reduziu a complexidade assintótica da multiplicação de matrizes para $O(n^{2.81})$. Embora o algoritmo aumente o número de adições e subtrações necessárias, a economia em multiplicações representa uma vantagem significativa, especialmente em matrizes de ordem elevada. Tal avanço foi um divisor de águas na teoria da complexidade, introduzindo novas possibilidades de otimização e abrindo o caminho para o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes.

Em 1971, Shmuel Winograd contribuiu significativamente para a área ao provar que sete multiplicações é, de fato, o número mínimo necessário para o caso 2×2 , independentemente do tipo de algoritmo utilizado. Assim, confirmou-se que a redução na quantidade de multiplicações encontrada por Strassen não era apenas uma característica particular de seu algoritmo não-comutativo, mas sim uma cota inferior global para o problema.

Outro avanço importante foi obtido por Julian D. Laderman, que apresentou um algoritmo mais eficiente para a multiplicação de matrizes 3×3 . Enquanto o método ingênuo requer 27 multiplicações, Laderman conseguiu reduzir o número para 23. Embora o algoritmo de Laderman não tenha superado o método de Strassen em termos de eficiência assintótica geral, ele representa um progresso substancial para o caso específico de matrizes quadradas de ordem 3^k , proporcionando uma nova cota superior para a complexidade desse tipo de multiplicação. Estudos posteriores indicam que o número de multiplicações necessárias para matrizes de tal tamanho ainda pode ser reduzido, com a cota inferior atualmente estimada em 19 multiplicações. Trata-se portanto de um problema, como a grande maioria, ainda em aberto no estudo da Complexidade da Multiplicação Matricial.

Assim, os resultados desta pesquisa destacam não apenas o impacto dos trabalhos de Strassen, Winograd e Laderman, mas também a relevância da análise

tensorial para a compreensão da complexidade da multiplicação de matrizes.

A busca por algoritmos mais eficientes continua sendo um campo ativo de pesquisa, com o objetivo de aproximar cada vez mais o número real de multiplicações necessárias das cotas inferiores teóricas estabelecidas.

Conclusões

Este estudo investigou a complexidade de formas bilineares, em especial o produto de matrizes, com foco nos avanços iniciais advindos de alguns dos primeiros resultados obtidos nesta área, começando com o algoritmo subcúbico descoberto por Strassen em 1969.

A análise aprofundada do trabalho posterior de Winograd permitiu a compreensão de qual é a cota inferior para o caso 2×2 , independentemente do tipo de algoritmo utilizado. A interpretação dos resultados de Winograd revelou-se especialmente desafiadora, devido à concisão da demonstração original, que omite algumas justificativas essenciais. Isso exigiu um esforço adicional para compreender as ideias subjacentes e conectar as diferentes passagens matemáticas.

Por fim, o exame do algoritmo de Laderman mostrou que pode-se estender a busca pela otimização para matrizes de dimensão maior. No entanto, observou-se que o algoritmo de Strassen continua sendo o mais eficiente, do ponto de vista assintótico.

A pesquisa proporcionou uma visão abrangente sobre como a otimização da multiplicação matricial está intrinsecamente ligada à decomposição de tensores e ao estudo da complexidade computacional. Isso reforça a importância de desenvolver algoritmos mais eficientes, que desempenham um papel crucial em diversas aplicações científicas e tecnológicas.

Agradecimentos

Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal de Itajubá (PIBIC/UNIFEI), e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Ao Prof. Dr. Rick Antônio Rischter pela orientação e por suas constantes disponibilidade, paciência e dedicação, sempre presentes nas discussões de ideias, no esclarecimento de dúvidas e na oferta de sugestões valiosas.

WINOGRAD, S. On the number of multiplications required to compute certain functions. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, New York, v. 6A, n. 5, p. 1840-1842, 1967.

Referências

BLÄSER, M. On the complexity of the multiplication of matrices of small formats. **Journal of Complexity**, Philadelphia, v. 19, n. 1, p. 43-60, 2003.

BRENT, R. P. Algorithms for matrix multiplication. **Report STAN-CS-70-157, Dept. of Computer Science, Stanford University**, Stanford, 1970.

HÅSTAD, J. Tensor rank is NP-complete. **Journal of Algorithms**, Philadelphia, v. 11, n. 4, p. 644-654, 1990.

HOPCROFT, J. E.; KERR, L. R. Some techniques for proving certain simple programs optimal. **Proceedings of the Tenth Annual Symposium on Switching and Automata Theory**, Washington, p. 36-45, 1969.

LADERMAN, J. D. A noncommutative algorithm for multiplying 3×3 matrices using 23 multiplications. **Bulletin of the American Mathematical Society**, New York, v. 82, n. 1, p. 126-128, 1976.

LANDSBERG, J. M. Geometry and the complexity of matrix multiplications. **Bulletin of the American Mathematical Society**. Texas, v. 45, p. 247-284, 2007.

LANDSBERG, J. M. **Tensors: geometry and applications**. Providence: AMS, 2012.

LIMA, E. L. **Álgebra exterior**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

LIMA, E. L. **Álgebra linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

STAVROU, S. G. **Canonical forms of $2 \times 2 \times 2$ and $2 \times 2 \times 2 \times 2$ tensors**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ciência) - Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan, Saskatoon, 2012.

STRASSEN, V. Gaussian elimination is not optimal. **Numerische Mathematik**, Berlin, v. 13, p. 354-356, 1969.

WINOGRAD, S. **Arithmetic complexity of computations**. Philadelphia: SIAM, 1980.

WINOGRAD, S. On multiplication of 2×2 matrices. **Linear Algebra and its Applications**, New York, v. 4, p. 381-388, 1971.