

INVARIANTES DE PONCELET NO PLANO

Pedro Esteves¹ (IC), Lucas Ruiz dos Santos¹ (PQ)¹ Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI.**Palavras-chave:** Bilhares, Elipses, Teorema de Poncelet, Invariantes de Poncelet.

Introdução

Neste trabalho, é tratado o conceito de bilhar matemático elíptico no \mathbb{R}^2 e propriedades invariantes em suas órbitas periódicas externas, (com maior enfoque em 3-periódicas), seguindo principalmente as referências [Tab05] e [GR21].

O bilhar matemático pode ser pensado como uma idealização que pretende descrever o movimento de uma massa pontual interna a uma região fechada ou aberta, mas em geral com fronteiras, (como uma curva simples em um plano), que se desloca em velocidade constante (sobre geodésicas) e obedece à lei de reflexão em cada uma de suas colisões com a fronteira da região, qual seja: o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Metodologia

A pesquisa foi realizada sobre intuito de compreensão do assunto e divulgação. A metodologia utilizada consistiu na leitura de textos e artigos de pesquisa sobre o assunto. O material estudado e os problemas resolvidos foram discutidos em reuniões semanais com o orientador. Aliado ao estudo dos resultados analíticos apresentados na literatura, utilizou-se o software Mathematica para auxílios de manipulações algébricas e visualização de problemas, contribuindo para uma maior compreensão e apreciação dos resultados gerais demonstrados

Resultados e discussão

O bilhar matemático elíptico é um sistema dinâmico discreto em que, dada uma elipse em \mathbb{R}^2 , cada par ordenado ponto da elipse e direção (apontando para dentro da elipse entre 0° e 180°) induz uma sequência de pontos na elipse O , chamada de órbita, governada com uma função reflexão. A função reflexão adotada neste trabalho é a chamada *Lei de Reflexão da Luz*, que envia pontos em direções por linhas retas e exige que o ângulo formado entre os

segmentos $p_{n-1}p_n$ e $p_n p_{n+1}$ com a reta tangente à elipse no ponto p_n são iguais. Entretanto, sem perda de generalidade por se estar na elipse, é mais simples calcular o ângulo dos segmentos através do gradiente da função que define a curva, no ponto p_n , pois se estes forem iguais a condição da *Lei de Reflexão da Luz* também é satisfeita, como ilustrado na Figura 1.

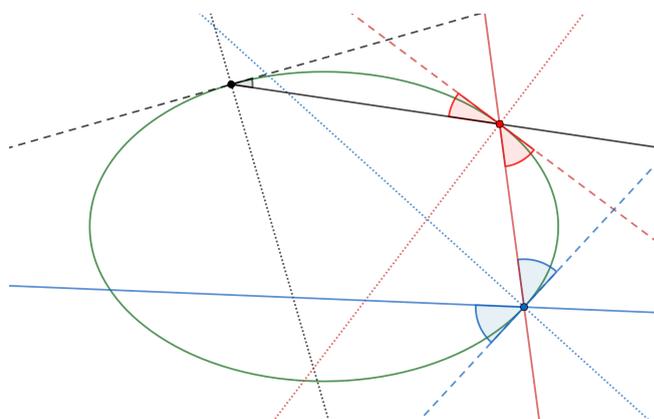


Figura 1 – Geometria da aplicação do bilhar.

Diante da construção do bilhar elíptico, uma categoria de órbitas (mais restrita) se destaca. Nomeadas de órbitas externas, têm a propriedade de que nenhum segmento $p_n p_{n+1}$ da órbita intersecta o segmento focal da elipse. Ademais, basta que um destes segmentos o faça para garantir que todos os outros (da mesma órbita) o farão. Essa característica implica numa propriedade das órbitas externas, de que todos os segmentos são tangentes a uma elipse aninhada à original, confocal e de eixos paralelos denominada cáustica. Por fim, existe uma última restrição às órbitas estudadas. Uma órbita é dita periódica de período n e número de voltas τ , (frequentemente referido como n -periódica, O_n) quando sua n -ésima iteração p_n retorna a seu ponto inicial.

Existe também, um teorema, em um contexto mais geral, que auxilia frequentemente no estudo de

tais órbitas, [Tab05]. O resultado é ilustrado na Figura 2.

Teorema 1 (Porisma de Poncelet):

Tome duas elipses aninhadas γ e Γ , sendo $\gamma \subset \Gamma$. Tome também um ponto $x \in \Gamma$ como sendo o vértice de um n -ângono inscrito em Γ e circunscrito sobre γ . Se tal cenário ocorrer, então todo ponto $y \in \Gamma$ é vértice de um n -ângono inscrito em Γ e circunscrito sobre γ .

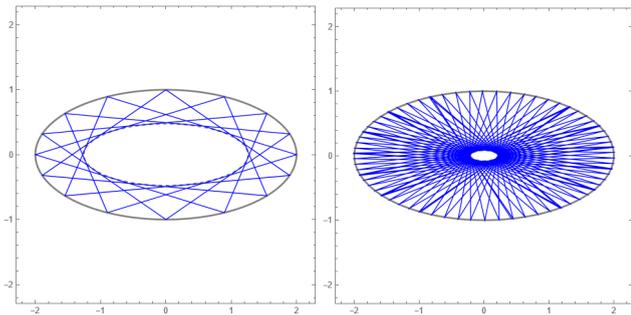


Figura 2 – Exemplos de bilhares externos na Elipse.

A respeito das famílias de órbitas elípticas externas e periódicas têm-se os seguintes invariantes, embasados em [GR21].

Perímetro de órbitas n -periódicas

Sejam $O_n(p_0) \subset \varepsilon$ uma órbita de bilhar n -periódica com número de voltas τ na elipse, $|p_n p_{n+1}|$ o comprimento do segmento de reta que une p_n a p_{n+1} , $P_{\varepsilon c}$ o perímetro da cáustica e c o comprimento de uma corda esticada fixada a p_0 e contornando ε_c . Então a seguinte quantidade é constante e invariante por $p_0 \in \varepsilon$

$$\sum_{i=0}^n |p_i p_{i+1}| = nc - (n - \tau)P_{\varepsilon c}.$$

Ponto Mittenpunkt Estacionário

Sobre uma família 3-periódica externa, em uma elipse ε , o Mittenpunkt X_9 de todos os triângulos da família é estacionário e situado ao centro da elipse [Kim19].

Locus dos incentros e excentros em 3-periódicas

Na família de órbitas 3-periódicas externas em uma

elipse ε , a curva formada pelo conjunto de incentros, ε_1 , e a curva formada pelo conjuntos dos excentros, ε_e , dos triângulos são ambas elipses concêntricas e com eixos paralelos à elipse original. Ademais, seus respectivos semieixos são

$$a_1 = \frac{\delta - b^2}{a}, \quad b_1 = \frac{a^2 - \delta}{b},$$

$$a_e = \frac{\delta + b^2}{a}, \quad b_e = \frac{a^2 + \delta}{b},$$

onde $\delta = \sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4}$.

Razão de raios incírculo e circuncírculo

Fixado um bilhar elíptico, a razão do raio do incírculo (r) pelo raio do circuncírculo (R) é invariante sobre qualquer triângulo da família 3-periódica [GRK21]. Seu valor é:

$$\frac{r}{R} = \frac{2(\delta - b^2)(a^2 - \delta)}{c^4}.$$

Triângulos 3-periódicos e seus triângulos excentrais

Sobre uma família 3-periódica externa, em uma elipse ε , a soma dos cossenos dos ângulos entre lados adjacentes, vértice a vértice, é invariante e dada por [Smi11]

$$\sum_{i=1}^3 \cos \theta_i = 1 + \frac{r}{R}.$$

Ainda sobre essa família, considere o triângulo $\Delta e_1 e_2 e_3$ formado pelos excentros. O produto dos cossenos dos ângulos entre seus lados adjacentes, vértice a vértice, também é invariante e dado por

$$\prod_{i=1}^3 \cos \theta'_i = \frac{r}{4R}.$$

Sendo A a área de um triângulo da família 3-periódica e A' a área de seu triângulo excentral associado, então a razão de áreas também é invariante e dada por

$$\frac{A}{A'} = \frac{r}{2R}.$$

Distâncias focais

Sendo d_{1i} a distância do vértice p_i de uma órbita 3-periódica ao foco F_1 na elipse e d_{2i} seu análogo à F_2 , o somatório dos inversos dessas distâncias é invariante e dada por

$$\sum \frac{1}{d_{1i}} = \sum \frac{1}{d_{2i}} = \frac{a^2 + b^2 + \delta}{ab^2}.$$

Curvaturas nos vértices

Sobre uma família 3-periódica externa, em uma elipse ε , sendo κ_i a curvatura no i -ésimo vértice, então a seguinte soma das curvaturas elevadas à potência $\frac{2}{3}$ para cada vértice é invariante pela escolha de p_0 [Wei19].

$$\sum_{i=1}^3 \kappa_i^{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 + b^2 + \delta}{(ab)^{\frac{4}{3}}}.$$

Por fim, um teorema útil para plotagem de órbitas externas, e parametrização de suas cáusticas [Sta22].

Teorema 2 (Parametrização de órbitas periódicas)

Considere uma elipse ε , de eixos $a, b \in \mathbb{R}$, e considere outra elipse ε_1 confocal, com eixos $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ e

$d_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$ com excentricidade $e_1 = \frac{d_1}{a_1}$.

Tem-se que o bilhar inscrito em ε com cáustica ε_1 pode ser canonicamente parametrizado por

$$(-a \cdot sn(u, e_1), b \cdot cn(u, e_1))$$

sob a condição de que $b_1 = b \cdot cn(\Delta u, e_1)$.

Isso significa que os vértices p_k de um bilhar externo na elipse tem parâmetros canônicos: $u = (u_0 + k 2\Delta u)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e um parâmetro inicial u_0 .

Desta forma, para se obter um bilhar n -periódico em ε com número de voltas τ , onde $mdc(n, \tau) = 1$, tendo como cáustica ε_1 , basta fazer a escolha:

$$\Delta u = 2\tau I(\frac{\pi}{2}, e_1)/n,$$

desde que

$$b_1 = b \cdot cn(\Delta u, e_1),$$

$$a_1 = a \cdot cn(\Delta u, e_1)/dn(\Delta u, e_1).$$

Conclusões

O bilhar matemático apresenta uma definição relativamente simples, com propriedades básicas naturais e com vasta simetria. Apesar disso, se mostra como uma ferramenta matemática que surge nos mais variados contextos com questões de formulação simples e de grande complexidade na tentativa de respondê-las. É também uma fonte rica de proposta de novas teorias em Sistemas Dinâmicos, dados os problemas em aberto que surgem nesta área de pesquisa.

Agradecimentos

Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal de Itajubá (PIBIC/UNIFEI) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro, além do meu professor e orientador Lucas.

Referências

[Tab05] TABACHNIKOV, Serge. Geometry and billiards. American Mathematical Soc., 2005.

[GR21] GARCIA, R.; REZNIK, D. Discovering Poncelet Invariants in the Plane. IMPA, Rio de Janeiro, 2021.

[GRK21] GARCIA, Ronaldo; REZNIK, Dan; KOILLER, Jair. New properties of triangular orbits in elliptic billiards. The American Mathematical Monthly, v. 128, n. 10, p. 898-910, 2021.

[Smi11] SMITH, James T. Methods of geometry. John Wiley & Sons, 2011.

[Sta22] STACHEL, Helmuth. On the motion of billiards in ellipses. European Journal of Mathematics, v. 8, n. 4, pp. 1602–1622, 2022.

[Wei19] WEISSTEIN, E. Mathworld. MathWorld—A Wolfram Web Resource. 2019.

[Kim19] KIMBERLING, Clark. A Combinatorial Classification of Triangle Centers on the Line at Infinity. J. Integer Seq., v. 22, n. 5, p. 19.5.4, 2019.