

## Geodésicas na métrica BTZ

Arthur Miguel Cunha e Silva<sup>1</sup>, Eduardo Henrique Silva Bittencourt (PQ)<sup>1</sup><sup>1</sup> Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)**Palavras - Chave:** Geodésicas, Métrica, Tensor de Ricci, Conexões.**Introdução**

Geodésicas são conceitos fundamentais na matemática e na física, representando o caminho mais curto entre dois pontos em superfícies ou espaços curvos. Elas generalizam a noção de linha reta da geometria euclidiana para contextos não-euclidianos. Na geometria diferencial, que estuda superfícies e curvas, as geodésicas são essenciais para descrever como as superfícies se curvam e se comportam. Por exemplo, em uma esfera, como a Terra, as geodésicas são os grandes círculos, como o equador e os meridianos. Na relatividade geral de Einstein, as geodésicas descrevem o movimento de objetos em um espaço-tempo curvo, onde a gravidade é vista como curvatura do espaço-tempo. Assim, planetas e estrelas seguem trajetórias geodésicas em seus movimentos sob a influência gravitacional de outros corpos celestes.

A solução de Schwarzschild oferece uma descrição do campo gravitacional de uma massa esférica e não girante, como uma estrela ou buraco negro, em uma região vazia do espaço. Essa solução é expressa por uma métrica que ilustra como o espaço-tempo se curva ao redor de um objeto massivo. Com a métrica pode-se calcular as geodésicas associadas, que mostram as órbitas de planetas.

Este trabalho investigará as geodésicas em uma teoria gravitacional em 2+1 dimensões, buscando novos insights sobre a estrutura do espaço-tempo e a dinâmica de corpos massivos em contextos menos convencionais.

**Metodologia**

O símbolo de Christoffel é uma parte importante da matemática utilizada em geometria diferencial e na teoria da relatividade geral. Ele está associado ao conceito de conexões e é essencial para descrever como objetos tensoriais em um espaço curvo mudam quando transportados ao longo de curvas sobre o espaço-tempo. Em particular, esse objeto matemático é usado para expressar como vetores se transportam de um ponto a outro em um espaço curvo. Eles são coeficientes que permitem definir o conceito de derivada covariante de um tensor em um espaço curvo. A sua definição em termos da métrica  $g_{il}$  (ou seja, as componentes da matriz da métrica do espaço)

e suas derivadas parciais:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}), \quad (1)$$

onde  $g^{ij}$  são as componentes matriz inversa da métrica.

O tensor de Ricci é um conceito fundamental na teoria da relatividade geral e na geometria diferencial. Em termos simples, ele é uma forma de medir a curvatura de uma variedade diferenciável, como o espaço-tempo, e está intimamente relacionado à maneira como a presença de massa e energia afeta a geometria do espaço-tempo. Matematicamente, se  $R_{ij}$  é o tensor de Ricci e  $R^i_{jkl}$  é o tensor de Riemann, então  $R_{ij}$  é obtido ao contrair um dos dois primeiros índices com um dos dois últimos índices do tensor de Riemann, por exemplo:

$$R_{ij} = R^k_{ikj}, \quad (2)$$

onde  $R^k_{ikj}$  é uma das componentes do tensor de Riemann.

Expressando o tensor de Riemann em termos das conexões de Christoffel e suas derivadas, temos

$$R^i_{jkl} = \partial_l \Gamma^i_{jk} - \partial_k \Gamma^i_{jl} + \Gamma^i_{ml} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^i_{mk} \Gamma^m_{jl}. \quad (3)$$

Da equação (2) podemos escrever o tensor de Ricci utilizando também as conexões:

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = \partial_j \Gamma^k_{ik} - \partial_k \Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{lj} \Gamma^l_{ik} - \Gamma^k_{lk} \Gamma^l_{ij}. \quad (4)$$

Em resumo, o tensor de Ricci é uma ferramenta crucial para descrever como o espaço-tempo é curvado pela presença de massa e energia e desempenha um papel central nas equações da relatividade geral de Einstein.

A métrica de Schwarzschild é representada por um campo estático e esfericamente simétrico, em que o espaço-tempo é vazio e assintoticamente plano.

Assumindo as coordenadas  $t$  (coordenada tipo-tempo),  $r$  (coordenada radial),  $\theta$  (ângulo polar) e  $\phi$  (ângulo azimutal), podemos construir uma métrica associada ao espaço-tempo de Schwarzschild como sendo

$$c^2 d\tau^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5)$$

sendo as funções  $A(r)$  e  $B(r)$  a serem determinadas. Para encontrá-las, vamos usar a proposição de que o

espaço-tempo é vazio e assintoticamente plano, ou seja, as equações satisfazem o Tensor de Ricci nulo  $R_{\mu\nu} = 0$  e ainda teremos as condições iniciais para as funções pois quando  $r$  tende ao infinito encontramos que  $A(r) \rightarrow c^2$  e  $B(r) \rightarrow 1$ . Extraíndo o tensor métrico do elemento de linha infinitesimal, obtemos

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sendo a inversa dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1/A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Da equação (1), podemos calcular as conexões associadas a esse tensor métrico. Por simplicidade, descartaremos os termos nulos e manteremos apenas os resultados não nulos:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad (8)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{A'(r)}{2B(r)}, \quad (9)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{B'(r)}{2B(r)}, \quad (10)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{B(r)}, \quad (11)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)}, \quad (12)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad (13)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (14)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad (15)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \quad (16)$$

Com as conexões não nulas, podemos encontrar as equações que satisfazem o tensor de Ricci, tal que  $R_{\mu\nu} = 0$ . Note que esse resultado só é não-trivial quando  $\mu = \nu$ ; para  $\mu \neq \nu$  o tensor de Ricci é identicamente nulo. Sabendo disso, calculamos a componente do tensor de Ricci para  $\mu = 0$  e  $\nu = 0$ , obtendo:

$$R_{00} = -\frac{A''(r)}{2B(r)} + \frac{A'(r)}{4B(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rB(r)} = 0 \quad (17)$$

$$R_{11} = \frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{A'(r)}{4B(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rB(r)} = 0 \quad (18)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B(r)} - 1 + \frac{r}{2B(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rB(r)} = 0 \quad (19)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta = 0 \quad (20)$$

Como os tensores são nulos podemos adicionar  $\frac{B(r)}{A(r)}$  vezes a equação (17) a (18) e após manipular vamos encontrar a relação:

$$A'(r)B(r) + B'(r)A(r) = 0, \quad (21)$$

o que implica que  $A(r)B(r) = \text{constante}$ . Nesse caso, pelas condições iniciais, identificamos que

$$A(r)B(r) = c^2, \quad \rightarrow \quad B(r) = \frac{c^2}{A(r)} \quad (22)$$

Desenvolvendo a equação (23), encontramos

$$A(r) + rA'(r) = c, \quad \rightarrow \quad \frac{d(rA(r))}{dr} = c^2, \quad \rightarrow \quad rA(r) = c^2(r+k), \quad (23)$$

sendo o termo  $k$  uma constante de integração. Portanto,

$$A(r) = c^2 \left( 1 + \frac{k}{r} \right), \quad \rightarrow \quad B(r) = \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^{-1} \quad (24)$$

Retomando para a métrica temos enfim:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left( 1 + \frac{k}{r} \right) dt^2 - c^2 \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (25)$$

É interessante ressaltar que se  $r \rightarrow \infty$ , o termo  $\frac{k}{r}$  fica muito pequeno. Então é notório que as influências nessa métrica são totalmente radiais, ou seja, ao longo da coordenada  $r$ . Sendo assim o potencial é do tipo newtoniano, o que significa que  $V = -\frac{MG}{r}$  sendo  $M$  a massa do corpo que está gerando o potencial gravitacional  $V$  e  $G$  a constante de Newton. Visto que estamos trabalhando com campos gravitacionais podemos simplesmente identificar da métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , em que  $h_{00} = \frac{k}{r} = \frac{2V}{c^2}$  é evidente que a constante  $k$  é simplesmente  $k = -\frac{2MG}{c^2}$ . Assim, a solução de Schwarzschild para o espaço-tempo na presença de um corpo massivo de massa  $M$  é dada por

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left( 1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) dt^2 - c^2 \left( 1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (26)$$

O que nos leva a

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2MG}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \frac{2MG}{c^2 r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (27)$$

e inversa

$$g^{ab} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-\frac{2MG}{c^2 r})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\frac{2MG}{c^2 r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (28)$$

### Resultados e discussão

Vamos introduzir a métrica BTZ (BAÑADOS, TEITELBOIM, AND ZANELLI, 1993), na notação proposta por S. Carlip (CARLIP, S. The (2 + 1)-dimensional black hole. Classical and Quantum Gravity, v. 12, n. 12, p. 2853-2879, 1995. DOI: 10.1088/0264-9381/12/12/005.), para um buraco-negro no espaço-tempo 2+1, como sendo

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + f^{-2} dr^2 + r^2 (d\phi + N^\phi dt)^2, \quad (29)$$

sendo  $N^\perp = f = (-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2})^{\frac{1}{2}}$ ,  $N^\phi = -\frac{J}{2r^2}$  em que ( $|J| \leq Ml$ ). Com a equação (33) podemos montar o tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -N^{\perp 2} + r^2 N^{\phi 2} & 0 & r^2 N^\phi \\ 0 & f^{-2} & 0 \\ r^2 N^\phi & 0 & -r^2 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

enquanto sua inversa toma a seguinte forma,

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^{\perp 2} + r^2 N^{\phi 2}} & 0 & \frac{1}{r^2 N^\phi} \\ 0 & f^2 & 0 \\ \frac{1}{r^2 N^\phi} & 0 & -\frac{1}{r^2} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Com o tensor métrico bem definido, podemos calcular as conexões associadas a métrica desse espaço-tempo, utilizando a definição feita anteriormente na equação (1). Visto que os resultados que importam são as conexões não nulas, sendo assim vamos encontrar os seguintes valores para as conexões:

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = -\frac{r}{(Ml^2 - r^2)}, \\ \Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{21}^0 = -\frac{2r}{J}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{r}{l^2} \left( \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} - \right) = \frac{r}{l^2} f^2, \\ \Gamma_{11}^1 &= f^{-2} \left( -\frac{2r}{l^2} + \frac{2J^2}{4r} \right), \\ \Gamma_{22}^1 &= r f^2, \\ \Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = \frac{2r}{Jl^2}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (32)$$

Com as conexões estabelecidas encontraremos as geodésicas associadas ao espaço-tempo, fazendo os cálculos através da seguinte definição:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (33)$$

Sendo  $x^0 = t$  a coordenada temporal e  $x^1 = r$  e  $x^2 = \phi$  as coordenadas espaciais, montamos explicitamente as equações (37), obtendo as seguintes equações de movimento:

$$\ddot{t} - 2r \left( \frac{\dot{r}\dot{t}}{Ml^2 - r^2} + \frac{2}{J} \dot{r}\dot{\phi} \right) = 0, \quad (34)$$

$$\ddot{r} + f^{-2} \left( -\frac{2r}{l^2} + \frac{2J}{4r} \right) \dot{r}^2 + r f^2 \left( \frac{\dot{t}^2}{l^2} + \dot{\phi}^2 \right) = 0, \quad (35)$$

$$\ddot{\phi} + 2r \left( \frac{2\dot{r}\dot{t}}{Jl^2} + \frac{1}{r^2} \dot{r}\dot{\phi} \right) = 0. \quad (36)$$

Alternativamente, utilizando a definição da Lagrangiana como sendo

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (37)$$

encontramos esta função para o caso de interesse como sendo

$$L = \left( M - \frac{r^2}{l^2} \right) \dot{t}^2 + (f^{-2}) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 - J \dot{t}\dot{\phi}. \quad (38)$$

Utilizando Euler-Lagrange, temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 2E, \quad (39)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2U, \quad (40)$$

Voltando na Lagrangiana e sabendo que esta assume um valor constante  $\sigma$  quando as geodésicas estão parametrizadas por um parâmetro afim, podemos simplesmente escrevê-la na forma

$$\begin{aligned} L - \sigma &= 0, \\ 0 &= U\dot{t} + E\dot{\phi} + \frac{1}{f^2} \dot{r}^2 \end{aligned} \quad (41)$$

Isolando a coordenada radial  $r$ , e tomando  $x = r^2$  e  $\dot{r} = 0$ , temos enfim a equação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \frac{E^2 J^2}{4} + \frac{1}{x} (UEJ - E^2) + \\ \left( -M + \frac{J^2}{4x} + \frac{x}{l^2} \right) (U^2 + \sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Tratando-se de uma equação polinomial de terceiro grau, em que as formas de solução de equações polinomiais de terceiro grau é feita e desenvolvida na Teoria de Galois (COX, David A. Galois Theory. 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.), sabendo que a fórmula geral é  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  e que:

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad (43)$$

As raízes de (51) podem ser vistas como:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( -q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right)}, \\ z_2 &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \left( -q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right)}, \end{aligned} \quad (44)$$

que satisfazem a seguinte condição:

$$\omega z_1 \omega^2 z_2 = z_1 z_2 = -\frac{p}{3}. \quad (45)$$

A solução é:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3} + z_1 + z_2 \\ x_2 &= -\frac{b}{3} + \omega z_1 + \omega^2 z_2 \\ x_3 &= -\frac{b}{3} + \omega^2 z_1 + \omega z_2 \end{aligned} \quad (46)$$

Retornando ao problema inicial, dessa forma reduzimos o problema a uma equação polinomial de terceiro grau, vamos obter o seguinte resultado a partir da eq.(46):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}M(U^2 + \sigma) + 2^{\frac{2}{3}} \\ &\sqrt[3]{\frac{bc}{3} - \frac{E^2 J^2}{4} + \frac{2}{27}M^3(U^2 + \sigma)^3} \\ &\sqrt[3]{+\sqrt{\left(-\frac{bc}{3} + \frac{E^2 J^2}{4} - \frac{2}{27}M^3(U^2 + \sigma)^3\right)^2}} \\ &\sqrt[3]{+\frac{4}{27}\left(\frac{1}{4}J(-E^2 + UEJ)(U^2 + \sigma)\right)^3} \\ &\sqrt[3]{+\frac{4}{27}\left(\frac{1}{3}M^3(U^2 + \sigma)^3\right)^3} \\ x_2 = x_3 &= \frac{1}{3}M(U^2 + \sigma) + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\omega \\ &\sqrt[3]{\frac{bc}{3} - \frac{E^2 J^2}{4} + \frac{2}{27}M^3(U^2 + \sigma)^3} \\ &\sqrt[3]{+\sqrt{\left(-\frac{bc}{3} + \frac{E^2 J^2}{4} - \frac{2}{27}M^3(U^2 + \sigma)^3\right)^2}} \\ &\sqrt[3]{+\frac{4}{27}\left(\frac{1}{4}J(-E^2 + UEJ)(U^2 + \sigma) + \frac{1}{3}M^3(U^2 + \sigma)^3\right)^3} \\ &+ \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\omega^2 \sqrt[3]{\frac{bc}{3} - \frac{E^2 J^2}{4} + \frac{2}{27}M^3(U^2 + \sigma)^3} \\ &\sqrt[3]{+\sqrt{\left(-\frac{bc}{3} + \frac{E^2 J^2}{4} - \frac{2}{27}M^3(U^2 + \sigma)^3\right)^2}} \\ &\sqrt[3]{+\frac{4}{27}\left(\frac{1}{4}J(-E^2 + UEJ)(U^2 + \sigma) + \frac{1}{3}M^3(U^2 + \sigma)^3\right)^3} \end{aligned} \quad (47)$$

(48)

## Conclusões

Foi feito um resgate teórico dentro da solução de Schwarzschild, com essa proposta fora desenvolvido e entendido como algumas ferramentas matemáticas se comportam dentro da teoria da Relatividade Geral e suas implicações e interpretações físicas. Encontramos as geodésicas e as soluções das equações de movimento dentro de um espaço-tempo 2+1 na presença de um buraco negro do tipo BTZ (BAÑADOS, TEITELBOIM, AND ZANELLI, 1993). A partir dessas equações que são polinomiais e de terceiro grau, se fez necessário um entendimento e revisão a cerca de conceitos propostos por Cardano e Galois, para encontrar os polinômios de terceiro grau. Encontramos as raízes, mas não foi possível fazer uma análise quanto aos parâmetros e valores associados, de onde futuramente encontraremos resultados interessantes relacionados as equações de movimento.

## Agradecimentos

A.M.C.S. agradece a Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) pelo apoio financeiro (PIBIC-UNIFEI) e oportunidades que me proporcionaram ao longo deste percurso tornando possível a realização dessa pesquisa.

## Referências

- BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Black Hole in Three-Dimensional Spacetime. Physical Review Letters, 1992.
- BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J.; HENNEAUX, M. Geometry of the 2+1 black hole. Physical Review D, 1993.
- COX, D. A. Galois Theory. Second Edition. John Wiley & Sons, 2012.
- CARLIP, S. The (2+1) - Dimensional Black Hole. Department of Physics University of California. U CD- 95-15gr-qc/9506079USA, 1995.
- FOSTER J.; NIGHTINGALE J. D. A Short Course in General Relativity. Third Edition. USA, 2006.