CÁLCULO QUÂNTICO E q-TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Erick Luz Aquino (IC), Márcia Sayuri Kashimoto (PQ)
Universidade Federal de Itajubá

Palavras-chave: q-Derivada. Integração quântica. q-Transformadas integrais.

Introdução

A mecânica quântica se faz muito presente nos dias atuais, por isso, é necessário desenvolver ferramentas para a mesma, isto é, desenvolver a matemática específica para esse estudo. Daí, entra o Cálculo Quântico. Segundo Ernst (2003) essa modalidade de cálculo é muito mais estudada por físicos, do que matemáticos. Apesar da semelhança do q-cálculo com o cálculo ordinário, seu estudo não emprega o uso do limite, o que facilita sua aplicação e compreensão no mundo físico.
O Cálculo Quântico tem aplicações em diversas áreas, como Matemática (teoria dos números e combinatória) e Física (entropia de Tsallis, generalização da estatística de Boltzmann-Gibbs, representação de grupos quânticos, teoria da relatividade).
Historicamente, no século XVIII, Euler obteve as fórmulas básicas do q-Cálculo. Resultados interessantes como o produto triplo de Jacobi e a teoria de funções q-hipergeométricas foram obtidos no século XIX. No entanto, no início do século XX, Jackson introduziu a noção da q- derivada e da q-integral definidas de um modo sistemático.
O objetivo é estudar os fundamentos básicos do Cálculo Quântico e as q-transformadas integrais que são úteis para resolver as equações q-diferenciais. Tais equações descrevem fenômenos da Física e outras Ciências.

Metodologia

A metodologia consistiu na apresentação semanal do conteúdo estudado pelo orientado via Google Meet (durante a quarentena) e na forma presencial através do quadro (pós-quarentena).
As atividades desenvolvidas no decorrer deste estudo foram baseadas nas referências bibliográficas citadas.

Resultados e discussão

No livro Kac (2002) é dada uma introdução ao q-cálculo, apresentando a noção de q-derivada e q-integral, em geral, as mais primitivas definições e resultados do q-cálculo. No estudo do artigo de Gauchman (2004) demonstramos algumas propriedades acerca das funções q-crescentes, q-decrescentes e q-convexas. Em Chung (2013) foi apresentado a noção de q-transformada de Laplace e suas aplicações.

Assim como a derivada ordinária, a q-derivada

$$(D_q f)(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$$

é uma transformação linear, e existem duas maneiras de calcular a q-derivada do produto e a q-derivada do quociente. Infelizmente, não há uma q-regra da cadeia, entretanto, é possível ter algo parecido no caso particular em que $g(x) = ax^b$, $a, b \in \Re$:

$$D_q (f \circ g)(x) = (D_{q^b} f)(g(x)) D_q g(x).$$

A q-Integral definida de Jackson é dada por

$$\int_0^b f(x) d_q x = (1-q) b \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j b) q^j ,$$

com $b > 0$. Uma das propriedades demonstradas acerca da q-integral que vale ser destacada, é o q-análogo do teorema fundamental do cálculo ordinário:

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, d_q x - \int_0^a f(x)\, d_q x ,$$

sendo $0 < a < b$.
Ainda temos no q-cálculo a q-integração por partes e a mudança de variável (provado apenas para certas funções).
Dado q entre 0 e 1, dizemos que $f(x)$ é q-crescente (resp. q-decrescente) quando $f(qx) \leq f(x)$ (resp. $f(qx) \geq f(x)$). Ainda, $f(x)$ é q-convexa se sua segunda q-derivada é não negativa para todo x. Com essas definições, foi demonstrado um resultado sobre Desigualdades de q-Hermite Hadamard envolvendo q-integrais de tais funções. Por conta de seu enunciado ser muito longo, vamos omitir o mesmo. Também foi obtido o seguinte resultado para uma certa função ϕ q-convexa com $l = \lim_{x \to 0} \phi(x)/x$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi(q^j) \leq \frac{\phi(1)+ql}{1-q^2}.$$

Assim como a transformada de Laplace ordinária, a q-transformada de Laplace,

$$F(s) = L_q(f(t)) = \int_0^{\infty} E_q^{-qst} f(t)\, d_q t \ ,$$

também é uma transformação linear, sendo

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]!} \ .$$

A notação [j] indica o q-análogo do inteiro j, definido por [j]= $\frac{q^j-1}{q-1}$ e $[0]! = 1$, $[j]! = [j][j-1]...[1]$ se $j \in N$.

Foi demonstrado para todo $a > -1$ que:

$$L_q(t^a) = \frac{1}{s^{a+1}} \Gamma_q(a+1),$$

na qual Γ_q é o q-análogo da função Gamma,

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x.$$

Se $f(t) = t^a$ e $g(t) = t^{b-1}$, a, $b > 0$, a q-convolução de f e g, denotada por $f * g$, é definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^{t} f(u) g(t - qu)\, d_q u \ .$$

Não encontramos uma fórmula geral para $L_q(f * g)$. Foi demonstrado que se $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{ai}$ e $g(t) = t^{b-1}$, $\lambda_i \in \Re$, então $L_q(f * g) = L_q(f) L_q(g)$.

Determinamos a q-transformada da função degrau unitário para $s > 0$:

$$L_q(u(t-a)) = \frac{1}{s} E_q^{-sa}.$$

Por último, obtemos um q-análogo da transformada da n-ésima derivada de uma função:

$$L_q(f^{(n)}(t)) = s^n L_q(f(t)) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0).$$

Conclusões

Atualmente, o Cálculo Quântico tem sido investigado por muitos pesquisadores devido à sua conexão com a Matemática e a Física. Possui aplicações em diversas áreas da Matemática como teoria dos números, combinatória, polinômios ortogonais, funções hipergeo-métricas básicas e áreas da Física: teoria quântica, mecânica e teoria da relatividade. Recentemente, um enorme interesse foi motivado devido à modelos matemáticos em computação quântica. Além disso, estudar Cálculo Quântico enriquece o conhecimento em várias disciplinas da Matemática: teoria dos conjuntos, análise, álgebra linear, teoria dos números.

As q-transformadas integrais podem ser empregadas no estudo das equações q-diferenciais e as suas conexões com os fenômenos físicos. Existem métodos interessantes para resolver tais equações, como por exemplo, as q-transformadas de Laplace e Mellin.

Sem o uso de limites, o Cálculo Quântico é uma forma de cálculo diferente de se usar, tendo diversas propriedades e q-análogos ainda a serem provados.

Agradecimento

Agradeço a UNIFEI pela bolsa de Iniciação Científica UNIÃO PIBIC/UNIFEI e a professora Márcia Sayuri Kashimoto.

Referências

CHUNG, W. S., KIM, T., KWON, H., On the q-Analog of the Laplace Transform, **arXiv:1307.6752**, 2013.

ERNST, T. A method for q-calculus. **J. Nonlin. Math. Phys. A. Method.** v. 10, p. 487-525, 2003.

GAUCHMAN, H., Integral Inequalities in q-Calculus. **Comput. Math. Appl. 47**, p. 281-300, 2004.

KAC, V.; CHEUNG P. **Quantum Calculus**, New York: Springer, 2002.

JOHAL, R. S. q-Calculus and entropy in nonextensive statistical physics. **Physical Review E**, v. 58, p. 4147-4151, 1998.

TSALLIS, C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. **Journal of Statistical Physics**, v. 52, Nos. 1/2, 1988.

JACKSON, F. H. q-Difference equations, **Amer. J. Math.** v. 32, n. 4, p. 305-314, 1910.