

## ANÁLISE DA DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURAS COM MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS EM PROBLEMAS DIRETOS E INVERSOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.

Carlos Alberto de Oliveira Filho<sup>1</sup> (IC), Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva (PQ)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratório de Transferência de Calor, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

**Palavras-chave:** Condução de Calor. Diferenças Finitas. Função Especificada. Problemas Inversos.

### Introdução

A transferência de calor é um fenômeno amplamente estudado em diversas áreas da engenharia, com aplicações que vão desde o desenvolvimento de materiais até o aprimoramento de processos industriais. Em muitos casos, as propriedades térmicas dos materiais ou as condições de contorno não são conhecidas ou são difíceis de serem medidas, sendo necessário recorrer à técnicas de solução de problemas inversos. Estas técnicas são utilizadas para estimar parâmetros ou condições a partir de medições indiretas, como a temperatura e o fluxo de calor. Esse tipo de análise é frequentemente mal-posta, ou seja, pequenas variações nos dados podem levar a grandes variações nas soluções.

Neste trabalho de iniciação científica, foi realizada a análise de problemas inversos aplicados à transferência de calor utilizando três experimentos distintos: dois com amostras de alumínio e um com PVC. Na montagem experimental foram utilizados um aquecedor resistivo, que forneceu calor uniformemente em uma extremidade das amostras, e um sistema de medição composto por transdutores, termopares e isolamento térmico na outra extremidade. Os dados de temperatura e fluxo de calor coletados foram utilizados para validar o método das Diferenças Finitas, tanto na sua forma explícita quanto implícita, e o método da Função Especificada, que envolve o uso do algoritmo de Stolz e múltiplos sensores.

A partir desses dados, o objetivo foi avaliar a eficiência e a precisão de cada método na resolução de problemas inversos, fornecendo uma comparação entre as diferentes abordagens e destacando as suas principais vantagens e limitações quando aplicadas a materiais com características térmicas distintas.

### Metodologia

Na Figura 1 ilustra-se o esquema de montagem do experimento onde se encontra a amostra aquecida em um lado por uma resistência, e isolada termicamente na outra extremidade. Um termopar e um transdutor se encontram na região de interface, fornecendo informações referentes

à temperatura e fluxo de calor, respectivamente. Um sistema de aquisição de dados é conectado com um computador para a análise e interpretação dos dados.



Figura 1 – Esquema de montagem do aparato experimental.

É importante que as condições de contorno sejam bem definidas, a fim de evidenciar a aplicação do fluxo transiente em  $x = 0$  e o isolamento térmico em  $x = L$ . Conforme segue:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

Particularmente para uma constante de tempo futuro  $r = 1$ , destaca-se a Equação (1), chamada de equação de Stolz. Uma das aplicações do algoritmo de Stolz é estimar o fluxo na superfície em função do tempo, a partir de medidas de temperatura transientes advindas de um único sensor. Essa abordagem é exata, pois são igualadas ambas as temperaturas calculada  $T_M$  e medida  $Y_M$ .

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - \sum_{n=1}^{M-1} \hat{q}_n \Delta \Phi_{M-n} - T_0}{\Phi_1} \quad (1)$$

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

Para múltiplos sensores, por sua vez, a temperatura calculada pode ser expressa em termos de subscritos que representam o número de sensores  $J$  e seu respectivo passo de tempo:

$$\hat{q}_M = \sum_{j=1}^r [(Y_{jM} - \hat{T}_{jM}|_{q_M=0}) \Phi_{j1}] \left( \sum_{k=1}^r \Phi_k^2 \right)^{-1} \quad (2)$$

A Equação (2) representa a Função Especificada do fluxo temporariamente constante, onde  $M$  representa o passo de tempo, e  $r$  a constante de tempo futuro.



Figura 2 – Ilustração do modelo PVC discretizado.

Uma vez definido o referencial teórico, é possível discretizar o modelo do PVC dividindo sua espessura em 49 partes e calculando sua temperatura por meio de métodos diretos.

$$T_x^i = \begin{cases} (-2F_o \left( \frac{q \Delta x}{k} + T_{x+1}^i \right) + T_x^{i+1}) / (1 - 2F_o) & , \text{ se } x = 0 \\ (-F_o(T_{x-1}^i + T_{x-1}^i) + T_x^{i+1}) / (1 - 4F_o) & , \text{ se } 0 < x < L \\ ((-F_o \cdot 2T_x^i) + T_x^{i+1}) / (1 - 4F_o) & , \text{ se } x = L \end{cases} \quad (3)$$

$$T_x^i = \begin{cases} \left( T_a + \left( \frac{2 \cdot F_o \cdot q \cdot \Delta x}{k + T_x^{i+1}} \right) \right) \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot F_o} & , \text{ se } x = 0 \\ \frac{(T_a + F_o \cdot (T_x^{i-1} + T_x^{i+1}))}{1 + 2 \cdot F_o} & , \text{ se } 0 < x < L \\ \frac{(T_a + (2 \cdot F_o \cdot T_x^{i-1}))}{1 + 2 \cdot F_o} & , \text{ se } x = L \end{cases} \quad (4)$$

As Equações (3) e (4) apresentam as funções definidas por partes para o método explícito e implícito, respectivamente. Observa-se em ambas as equações condicionais que a temperatura analítica depende da distância  $x$ , sobretudo, tendo em vista as condições de fronteira previamente estabelecidas.



Figura 3 – Ilustração do corpo de alumínio e localização dos sensores de temperatura.

A Figura 3 ilustra a amostra de 9,5 [mm] de espessura e a localização dos sensores. Cada um dos termopares se encontram equidistantes em 65 [mm] entre si, e todos pertencem ao mesmo plano ortogonal em  $x = L$ .

Resultados e discussão

Os resultados a seguir mostram os resultados alcançados para o cálculo da temperatura do PVC utilizando o método das Diferenças Finitas, bem como os fluxos de calor estimados para o alumínio.

Para o PVC :

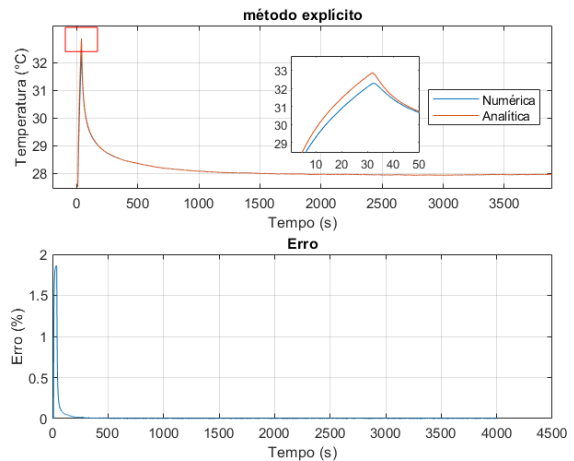


Figura 4 – Gráficos de temperatura e erro em função do tempo pelo método explícito.

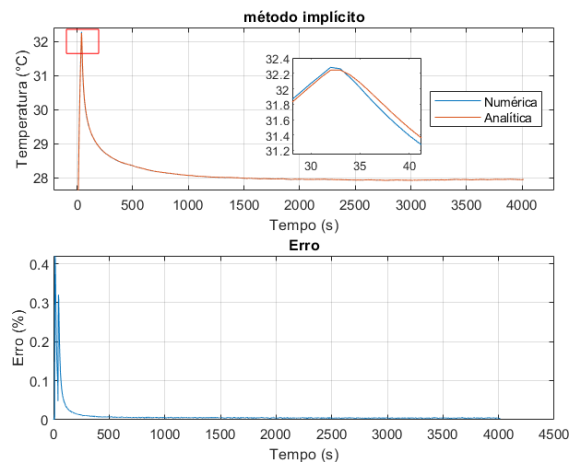


Figura 5 – Gráficos de temperatura e erro em função do tempo pelo método implícito.

A Figura 4 e a Figura 5 ilustram os resultados obtidos após a coleta e processamento dos dados do experimento PVC. Inicialmente, é possível destacar que tanto o método explícito quanto o método implícito apresentaram resultados satisfatórios ao calcularem a resposta analítica, tendo em vista que ela se aproximou consideravelmente da resposta numérica em praticamente a totalidade do seu domínio. No que diz respeito à comparação entre os métodos, percebeu-se uma precisão ligeiramente superior no método implícito, tendo em vista seu erro inferior a 0,5% em comparação com 2% do método explícito.

*“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”*

Dado	Método explícito	Método implícito
Erro máximo [%]	1,86	0,42
Resíduo máximo [°C]	0,598	0,121
Processamento [s]	0,001097	1,173418

Tabela 1 – Resumo da comparação entre o método explícito e implícito para o experimento do PVC.

Ademais, observa-se que apesar do método implícito se sobressair em termos de confiabilidade, o mesmo apresentou um tempo de processamento consideravelmente maior. Logo, os dados indicam, conforme esperado, que a solução mais precisa, é também a mais exigente em recursos computacionais.

**Para o AL5052 :**



Figura 6 – Gráfico referentes ao AL5052 para o passo de tempo futuro unitário.

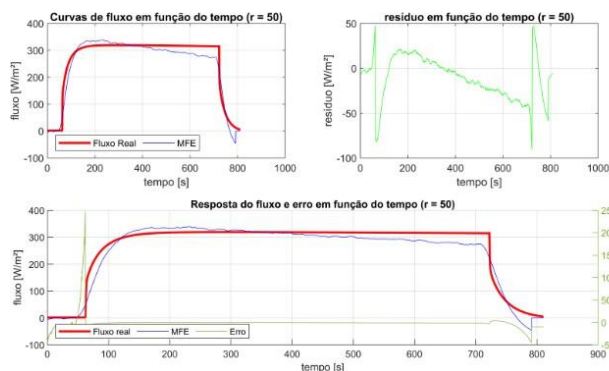


Figura 7 – Gráficos referentes ao AL5052 para  $r = 50$ .

Primeiramente, é possível destacar que para o tempo futuro  $r = 1$  a resposta do fluxo para o MFE é praticamente igual ao resíduo, o que significa que o método não é estável para passo de tempo unitário (Figura 6). Na medida em que  $r$  é aumentado, maiores são as iterações, de modo que o fluxo estimado (curva azul) se aproxima gradativamente do fluxo experimental (curva vermelha). Por fim, para um número de tempo futuro satisfatoriamente grande, os ruídos e resíduos são consideravelmente reduzidos e a resposta do fluxo em função do tempo converge (Figura 7). Ao aumentar o número de iterações, é correto afirmar que o processamento computacional também se torna mais longo. Essas e demais informações se encontram exibidas na Tabela 2.

r	Resíduo médio [W/m <sup>2</sup> ]	Desvio Padrão [W/m <sup>2</sup> ]	Processamento [s]
1	610	757,0	0,08
5	35	44,2	0,32
10	21	24,5	0,61
15	19	21,4	1,01
20	18	20,5	1,57
50	17	19,3	8,27

Tabela 2 – Resumo da comparação entre diferentes tempos futuros para o Método da Função Especificada.

Na Figura 8 apresenta-se de maneira individual os diferentes sensores sob o algoritmo de Stolz. Cada sensor posicionado em sua respectiva distância longitudinal, originou um gráfico característico conforme ilustrado abaixo:

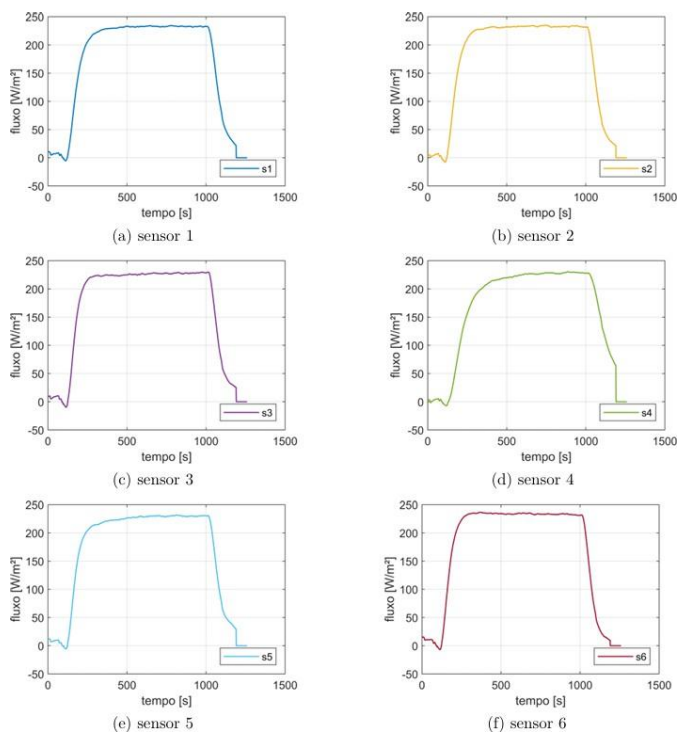


Figura 8 – Gráfico do fluxo em relação ao tempo para o método de Stolz.

Com o objetivo de facilitar a visualização, traçaram-se as curvas individuais de cada sensor no mesmo gráfico para comparar o método de Stolz com o Método da Função Especificada aplicada para múltiplos sensores (Figura 9). Por conta dos sensores estarem dispostos no mesmo plano de aquecimento da amostra, é de se esperar que existam semelhanças entre seus traços. A diferença se encontra presente, pois em condições experimentais reais, não é possível assegurar uma distribuição exatamente homogênea do aquecimento da amostra, bem como estão presentes defeitos e imperfeições intrínsecas ao método experimental, fato este que contribui para uma sutil diferenciação entre a captação dos sensores.

*“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”*

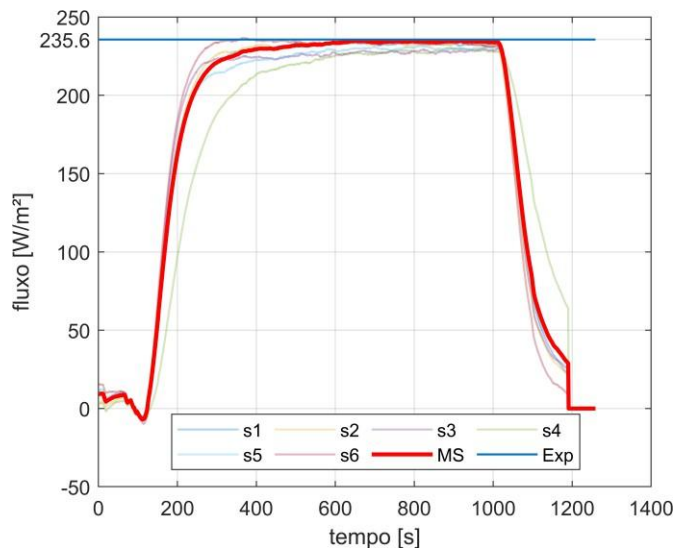


Figura 9 – Gráfico do fluxo em função ao tempo para diferentes sensores, múltiplos sensores (vermelho) e experimental (azul opaco).

Por conseguinte, constam na Tabela 3 os resultados observados, onde verifica-se a maior confiabilidade de *s6*, seguido dos múltiplos sensores, quando comparados com o valor experimental de 235,6 W/m<sup>2</sup>

sensor	Resíduo médio [W/m <sup>2</sup> ]	Desvio Padrão [W/m <sup>2</sup> ]
<i>s1</i>	23,17	5,14
<i>s2</i>	22,59	5,54
<i>s3</i>	27,65	2,39
<i>s4</i>	35,06	15,48
<i>s5</i>	27,67	5,94
<i>s6</i>	20,07	1,72
múltiplos sensores	22,40	3,75

Tabela 3 – Resumo dos dados de saída do experimento de múltiplos sensores.

### Conclusões

Com base nos dados e discussões apresentadas é possível afirmar que o presente relatório obteve sucesso em comparar metodologias aplicadas à determinação do campo de temperaturas em problemas de condução de calor, pois colocou em evidência a aplicabilidade das técnicas bem como suas possíveis limitações. A comparação entre os dados experimentais e as simulações numéricas ressaltou a necessidade de uma abordagem crítica na escolha das metodologias, especialmente em aplicações onde as condições de contorno e as propriedades térmicas dos materiais podem variar significativamente.

Este estudo abre caminho para futuras investigações sobre a otimização de processos térmicos em diversos

materiais. A relevância dessas técnicas se estende além do âmbito acadêmico, refletindo sua importância prática na indústria, onde a eficiência térmica é crucial para o desenvolvimento sustentável e a inovação tecnológica. Assim, a aplicação de métodos numéricos não apenas enriquece a pesquisa, mas também fornece ferramentas essenciais para enfrentar os desafios contemporâneos na engenharia mecânica.

### Agradecimentos

Sinceros agradecimentos a UNIFEI, bem como ao CNPq, CAPES, e FAPEMIG pelo financiamento e viabilização do devido processo institucional em prol da Educação e da Ciência.

### Referências

- ATTAWAY, Dorothy C. **Matlab: a practical introduction to programming and problem solving**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2022.
- BARDON, Jean-Pierre; CASSAGNE, Bernard. **Température de surface**. [S.l.]: Ed. Techniques Ingénieur, 1981.
- BECK, James Vere; ARNOLD, Kenneth J. **Parameter estimation in engineering and science**. [S.l.]: James Beck, 1977.
- HAHN, David W; ÖZISIK, M Necati. **Heat conduction**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- LEWIS, Roland Wynne. **Numerical methods in heat transfer**. Wiley-Interscience, New York, NY, 1985. MARTIN, Robert C. **Clean code: a handbook of agile software craftsmanship**. [S.l.]: Pearson Education, 2009.
- ÖZİŞIK, M Necati; ORLANDE, Helcio RB; COLAÇO, Marcelo J; COTTA, Renato M. **Finite difference methods in heat transfer**. [S.l.]: CRC press, 2017.
- TILLMANN, Amanda R; BORGES, Valério Luiz; GUIMARÃES, Gilmar; SILVA, Ana Lúcia F; SILVA, Sandro MM. Identification of temperature-dependent thermal properties of solid materials. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, SciELO Brasil, v. 30, p. 269–278, 2008.
- WOODBURY, Keith A; NAJAFI, Hamidreza; DE MONTE, Filippo; BECK, James V. **Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2023.