

SÍNTESE DE CAMPOS DE PRESSÃO ACÚSTICA ALEATÓRIA GERADOS POR CAMADA LIMITE TURBULENTA UTILIZANDO ARRANJO DE MONOPOLOS

Otávio Lage Dias¹ (IC), Clinton André Merlo (PQ)¹

¹Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI - Campus Itabira.

Palavras-chave: Camada limite turbulenta. Síntese acústica. Modos de radiação acústica.

Introdução

Este estudo investiga a viabilidade de sintetizar campos de pressão acústica aleatória, característicos de uma camada limite turbulenta (TBL, *Turbulent Boundary Layer*), por meio de um arranjo plano de fontes monopulares com simetria por imagem. Uma das principais aplicações dessa metodologia é a avaliação da transparência acústica de painéis submetidos a campos de pressão parietal estocásticos multidimensionais, como os produzidos pela TBL.

A síntese experimental ou numérica de campos acústicos com arranjos de fontes controladas é uma técnica amplamente consolidada na literatura, conforme demonstram Elliott et al. [1], Bravo & Maury [2], Maury & Bravo [3] e Merlo [4]. Nessa abordagem, sinais de excitação são gerados a partir de ruídos brancos não correlacionados e filtrados por filtros modeladores projetados para reproduzir a densidade espectral cruzada (*Cross Spectral Density*, CSD) característica da TBL.

O modelo estatístico de Corcos é adotado para definir a coerência espacial e as propriedades espectrais da TBL, servindo de base para a construção da matriz CSD do campo de pressão alvo. Devido à natureza estocástica do modelo de excitação, apenas propriedades estatísticas podem ser reconhecidas e analisadas.

A radiação acústica é simulada pelo arranjo de monopolos com simetria por imagem, que impõe a condição de fronteira rígida do painel sem recorrer a métodos numéricos de alto custo, como o Método dos Elementos Finitos.

Para estabilizar o problema inverso e evitar a sobrecarga das fontes, usa-se a regularização baseada em Modos de Radiação Acústica (ARMs, *Acoustic Radiation Modes*), selecionando apenas os modos com maior eficiência de radiação, conforme descrito por Pasqual et al. [5] e Merlo [6]. Os ARMs são os autovetores da matriz que acopla a potência sonora do modelo acústico.

A avaliação dos resultados é realizada por meio de métricas de controle que quantificam a fidelidade

estatística do campo sintetizado em relação ao campo alvo gerado pela TBL. As métricas consideradas são: o erro quadrático médio (\hat{J}_e), o erro residual (ε_y) e a norma da velocidade quadrática média das fontes ($\|\mathbf{q}^{*2}\|$).

Metodologia

A abordagem segue a técnica de filtros modeladores (*shaping filters*), regularização modal e simulação numérica para sintetizar, com um arranjo reduzido de monopolos, o campo de pressão aleatório gerado por TBL sobre painéis rígidos. O objetivo da síntese é garantir que o campo reproduzido preserve as propriedades estatísticas do campo alvo, em particular sua matriz de densidade espectral cruzada \mathbf{S}_{ww} , obtida a partir do modelo clássico de Corcos

$$S_{ww}(\omega) = S_0(\omega) e^{-|r_x|/L_x(\omega)} e^{-|r_y|/L_y(\omega)} e^{-j\omega r_y/U_c} \quad (1)$$

onde $S_0(\omega)$ representa a densidade espectral de potência, $|r_x|$ e $|r_y|$ são as separações espaciais nas direções longitudinal e transversal, L_x e L_y representam os comprimentos de correlação nestas direções, e U_c é a velocidade de convecção da turbulência.

O espectro do campo de pressão alvo é descrito por $\mathbf{w} = \mathbf{D}\mathbf{x}$, em que \mathbf{x} representa os sinais de referência de ruído branco não correlacionados, filtrados por uma matriz de moldagem \mathbf{D} . Essa matriz é projetada de forma que o campo sintetizado apresente a mesma matriz de densidade espectral cruzada do campo alvo, isto é,

$$\mathbf{S}_{ww} = \mathbf{D}\mathbf{D}^H \quad (2)$$

A decomposição de \mathbf{S}_{ww} em autovalores fornece $\mathbf{D} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ onde \mathbf{Q} contém os autovetores e $\mathbf{\Lambda}$ os autovalores.

A síntese sonora é realizada por meio de um arranjo de monopolos com simetria por imagem, no qual a matriz de acoplamento acústico \mathbf{A}_d relaciona os sinais emitidos pelas fontes às pressões medidas nos microfones. Os elementos \mathbf{A}_d são obtidos a partir

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

da expressão do campo acústico gerado pelo arranjo de monopolos e suas imagens:

$$p(x_j, y_j, z_j, k) = -j\omega\rho_0 \sum_{i=1}^n Q_i \left[\frac{e^{jkr_{ij}^-}}{4\pi r_{ij}^-} + \frac{e^{jkr_{ij}^+}}{4\pi r_{ij}^+} \right] \quad (3)$$

onde Q_i representa a velocidade de volume da i -ésima fonte monopolar, enquanto r_{ij}^- e r_{ij}^+ correspondem, respectivamente, às distâncias do monopolo real e de sua imagem até o ponto de medição (x_j, y_j, z_j) .

O espectro do campo gerado é descrito como $\mathbf{y} = \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{x}$, onde \mathbf{M} é a matriz de filtros de controle que ajusta os sinais das fontes para aproximar \mathbf{w} . A densidade espectral do campo gerado é

$$\mathbf{S}_{yy} = \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{M}^H \mathbf{A}_d^H \quad (4)$$

O espectro do erro entre o campo alvo e o gerado é definido como $\mathbf{e} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}_d \mathbf{M}) \mathbf{x}$ e sua densidade espectral por

$$\mathbf{S}_{ee} = \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{M}^H \mathbf{A}_d^H - \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{D}^H - \mathbf{D} \mathbf{M}^H \mathbf{A}_d^H + \mathbf{D} \mathbf{D}^H \quad (5)$$

Minimizar o erro quadrático médio $J_e = \text{Tr}[\mathbf{S}_{ee}]$ garante que o campo gerado esteja o mais próximo, estatisticamente, do campo alvo, em termos de mínimos quadrados. A matriz \mathbf{M} é otimizada derivando J_e em relação aos elementos de \mathbf{M} e igualando a zero, assim

$$\mathbf{M}_{ot} = (\mathbf{A}_d^H \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{A}_d^H \mathbf{D} \quad (6)$$

e o vetor de espectro de velocidade ótima das fontes será $\mathbf{q}_{ot}^* = \mathbf{M}_{ot} \mathbf{x}$. Portanto, o campo de pressão gerado será

$$\mathbf{y}_{ot} = \mathbf{A}_d \mathbf{q}_{ot}^* \quad (7)$$

A regularização da síntese é formulada considerando apenas os modos de radiação acústica (ARMs) mais eficientes. O vetor de espectro de velocidade das fontes $\tilde{\mathbf{q}}^*$ é decomposto como

$$\tilde{\mathbf{q}}^* = \tilde{\Psi}_d \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^* \quad (8)$$

onde $\tilde{\Psi}_d$ é a matriz modal reduzida formada pelos \tilde{n} ARMs (ativos e reativos) mais eficientes, e $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^*$ é o vetor de espectro das contribuições dos ARMs. Portanto, o espectro do campo de pressão gerado será

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_d \tilde{\Psi}_d \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^* \quad (9)$$

O espectro do erro de síntese regularizada será

$$\tilde{\mathbf{e}} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}_d \tilde{\Psi}_d \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{x} \quad (10)$$

onde $\tilde{\mathbf{M}}$ é a matriz de filtros de controle reduzida.

A minimização do erro quadrático médio regularizado conduz à matriz de controle ótima

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ot} = (\tilde{\Psi}_d^H \mathbf{A}_d^H \mathbf{A}_d \tilde{\Psi}_d)^{-1} \tilde{\Psi}_d^H \mathbf{A}_d^H \mathbf{D} \quad (11)$$

que gera o sinal ótimo das contribuições dos ARMs

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{ot}^* = \tilde{\mathbf{M}}_{ot} \mathbf{x} \quad (12)$$

Assim, o campo de pressão alvo é aproximado estatisticamente pelo campo

$$\tilde{\mathbf{y}}_{ot} = \mathbf{A}_d \tilde{\Psi}_d \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{ot}^* \quad (13)$$

A avaliação da síntese do campo de pressão gerado por TBL foi realizada por três métricas complementares, que permitem verificar a fidelidade espectral, a coerência espacial e a viabilidade física da síntese.

1. Erro quadrático médio normalizado

Representa a fração da energia do campo alvo \mathbf{S}_{ww} que está fora do espaço de síntese.

$$\hat{J}_e = \frac{\text{Tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{A}_d \mathbf{A}_d^\dagger) \mathbf{S}_{ww}]}{\text{Tr}[\mathbf{S}_{ww}]} \quad (14)$$

onde \mathbf{A}_d^\dagger é a pseudo-inversa de \mathbf{A}_d . Critério prático: $\hat{J}_e < -10$ dB indica boa reprodução.

2. Erro residual

Indica o quanto da estrutura espacial do campo alvo foi preservada pelo campo gerado.

$$\varepsilon_y = \frac{\|\mathbf{C}_{ww} - \mathbf{C}_{yy}\|_F}{\|\mathbf{C}_{ww}\|_F} \quad (15)$$

onde $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius, \mathbf{C}_{ww} e \mathbf{C}_{yy} são as matrizes de correlação espacial dos campos de pressão alvo e gerado. Critério prático: $\varepsilon_y < -1$ dB considerado aceitável.

3. Norma da velocidade quadrática média

A métrica indica o esforço das fontes sonoras para gerar o campo desejado; valores altos sugerem risco de saturação, enquanto valores baixos — obtidos com técnicas como ARMs — indicam uma síntese mais eficiente e estável.

$$\|\overline{\mathbf{q}^{*2}}\| = \sqrt{\text{Tr}[(\mathbf{A}_d^\dagger \mathbf{D} \mathbf{D}^H \mathbf{A}_d^\dagger)^H] \mathbf{S}_{ww}} \quad (16)$$

Resultados e discussão

As simulações numéricas foram realizadas considerando um modelo de propagação acústico baseado em um arranjo plano de fontes monopulares com dimensões $0,82\text{m} \times 0,43\text{m}$, distribuídas uniformemente em uma malha de $n_x \times n_y = 20 \times 10 = 200$ monopolos, incluindo suas imagens para imposição da condição de fronteira rígida. O arranjo de microfones é

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

composto por $m_x \times m_y = 25 \times 19 = 475$ sensores, igualmente espaçados, posicionados a 0,002m acima de um painel rígido de dimensões 0,5m \times 0,38m. O painel rígido está localizado a uma distância de 0,1m do arranjo de monopolos e de suas imagens, estando todos os centros alinhados. As métricas de controle foram avaliadas para mínimos quadrados sem regularização (MQ) e mínimos quadrados regularizados por modos de radiação acústica (ARM), considerando os 50 modos mais eficientes dentre os 200 modos disponíveis.

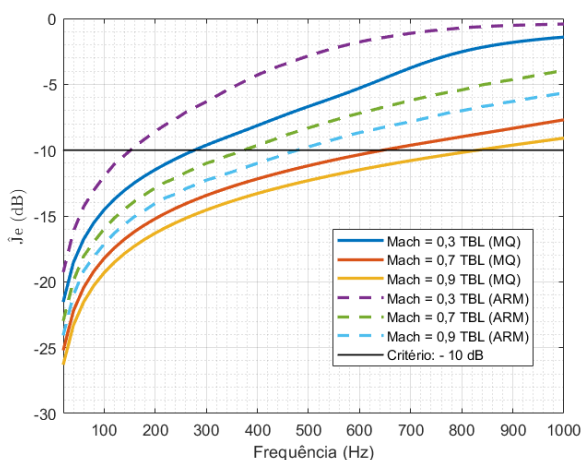


Figura 1 - Erro quadrático médio, em função da frequência para três números de Mach.

Pela Figura 1, observa-se que o método MQ apresenta os menores valores de \hat{J}_e , mantendo-se próximo ou abaixo do critério de aceitabilidade (-10 dB) em boa parte da faixa de frequências. Já o método ARM conduz a erros maiores, especialmente em altas frequências, pois apenas os 50 ARMs mais eficientes foram considerados. O método MQ, por utilizar todos os graus de liberdade, garante maior fidelidade estatística ao campo alvo.

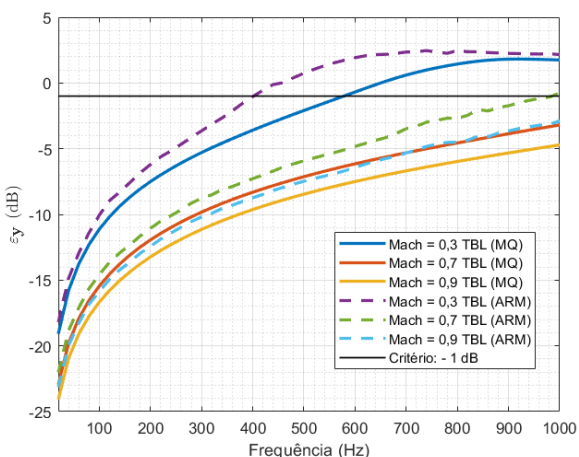


Figura 2 - Erro residual, em função da frequência para três números de Mach.

A Figura 2 mostra o erro residual (ϵ_y), que mede a preservação da coerência espacial. De maneira consistente com \hat{J}_e , o MQ apresenta os menores valores, frequentemente abaixo do critério de aceitabilidade (-1 dB), assegurando boa reprodução da estrutura espacial. A abordagem com ARMs, por outro lado, apresenta erros maiores devido à limitação do número de modos utilizados, principalmente em altas frequências. Esses resultados reforçam o compromisso entre fidelidade e viabilidade: o MQ assegura melhor precisão estatística, enquanto o ARM sacrifica parte dessa precisão em troca de maior robustez.

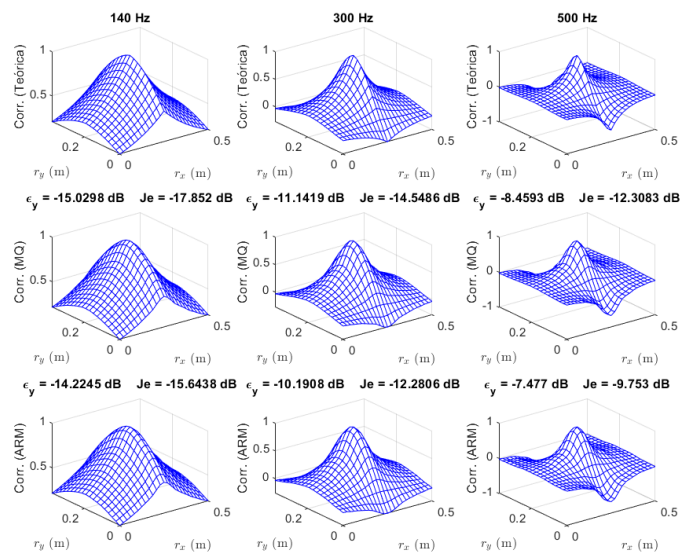


Figura 3 – Estruturas de correlação espacial quando a reprodução perfeita de um campo TBL a Mach 0,9 é assumida (topo), quando sintetizada sem regularização MQ (meio) e com regularização ARM (abaixo).

A Figura 3 apresenta as estruturas de correlação espacial para três frequências representativas (140 Hz, 300 Hz e 500 Hz). A primeira linha mostra o campo alvo (modelo de Corcos), enquanto as linhas seguintes apresentam os resultados com monopolos via MQ (segunda linha) e via ARM (terceira linha). Nota-se que, em baixas frequências, ambos os métodos reproduzem satisfatoriamente o campo alvo. Contudo, em frequências mais altas, o MQ mantém maior fidelidade estatística, enquanto o ARM apresenta distorções, resultado esperado da redução do espaço de síntese. Este comportamento reflete a escolha de considerar apenas 50 ARMs, descartando parte significativa do espaço de radiação.

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

Por fim, a Figura 4 apresenta a norma da velocidade quadrática média das fontes ($\|\overline{\mathbf{q}^*}^2\|$), que mede o esforço necessário para a síntese. Observa-se que o método MQ exige amplitudes da ordem de 10^4 , inviáveis em uma implementação experimental. Em contraste, a regularização ARM reduz o esforço em várias ordens de magnitude ($\sim 10^{-1}$ a 1), tornando a síntese mais estável, eficiente e viável fisicamente.

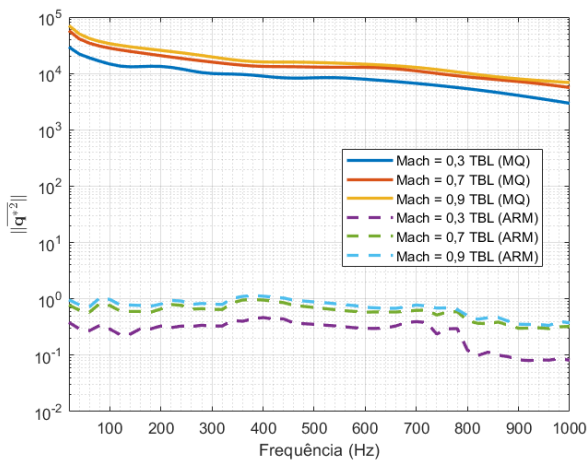


Figura 4 – Norma da velocidade quadrática média, em função da frequência para três números de Mach.

Em conjunto, os resultados revelam um claro *trade-off*:

- O método MQ proporciona a melhor fidelidade estatística (menores \hat{J}_e e ε_y), mas às custas de um esforço excessivo das fontes, o que limita sua aplicabilidade prática.
- O método ARM, ao restringir o número de modos de radiação, aumenta os erros de síntese, mas reduz drasticamente o esforço necessário, garantindo maior estabilidade e viabilidade experimental.

Conclusões

Os resultados mostraram que, embora os monopolos sejam fontes teóricas, sua utilização simplifica o problema de síntese e permite reproduzir estatisticamente tanto a coerência espacial quanto as propriedades espectrais do campo alvo.

Em comparação ao método de mínimos quadrados (MQ), a regularização por modos de radiação acústica (ARMs) reduziu significativamente o esforço das fontes, ainda que com perda parcial de fidelidade em altas frequências.

O modelo acústico adotado (200×475) apresentou limitações na síntese do campo TBL em escoamentos de baixa velocidade, mostrando-se mais eficaz em baixas

frequências e em escoamentos rápidos, quando o comprimento de correlação transversal decai mais rapidamente. Já em frequências mais altas, a reprodução fiel exigirá arranjos mais densos e não uniformes de fontes.

Conclui-se que a síntese com arranjos de monopolos constitui uma estratégia promissora para a reprodução estatística de campos de pressão aleatória gerados por escoamentos turbulentos, fornecendo uma referência conceitual útil para futuras implementações experimentais com fontes físicas aproximadas.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), bem como à Universidade Federal de Itajubá (UNIFEL), campus Itabira, pelo apoio institucional e pela disponibilização da infraestrutura necessária para o desenvolvimento desta pesquisa.

Estendo meus agradecimentos ao orientador pelo suporte e discussões técnicas, bem como à minha família e amigos pelo apoio e incentivo ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- [1] ELLIOTT, S. J.; MAURY, C.; GARDONIO, P. The synthesis of spatially correlated random pressure fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 117, n. 3, p. 1186–1201, 2005.
- [2] BRAVO, T.; MAURY, C. The experimental synthesis of random pressure fields: methodology. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 120, n. 5, p. 2702–2711, 2006.
- [3] MAURY, C.; BRAVO, T. The experimental synthesis of random pressure fields: practical feasibility. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 120, n. 5, p. 2712–2723, 2006.
- [4] MERLO, C. A. Synthesis of the diffuse random pressure field using active and reactive radiation modes. *Contemporary Journal*, v. 3, n. 11, p. 20849–20872, 2023.
- [5] PASQUAL, A. M.; ARRUDA, J. R. F.; HERZOG, P. Application of acoustic radiation modes in the directivity control by a spherical loudspeaker array. *Acta Acustica united with Acustica*, v. 96, n. 1, p. 32–42, 2010.
- [6] MERLO, C. A.; PASQUAL, A. M.; MEDEIROS, E. B. Sound field synthesis on flat panels using a planar source array controlled by its active and reactive radiation modes. *Acta Acustica united with Acustica*, v. 105, n. 1, p. 139–151, 2019.