

FINITUDE DA ENERGIA EM SINAIS OBTIDOS POR CONVOLUÇÃO: UMA ABORDAGEM MATEMÁTICACarlos E. S. Silva (IC)¹, Gustavo Franco Marra Domingues (PQ)¹¹Universidade Federal de Itajubá - Campus Itabira**Palavras-chave:** Convolução. Energia. Sinal. Teorema de Rayleigh. Transformada de Fourier.**Introdução**

Esta pesquisa tem como objetivo geral investigar de forma fundamentada se a convolução entre dois sinais — um com energia finita e outro absolutamente integrável — resulta, necessariamente, em um terceiro sinal também de energia finita. Essa questão surge a partir de aplicações da teoria de sinais e sistemas e da matemática ao analisar a solução de um problema proposto por Nahin (2015).

A relevância deste estudo reside na necessidade de estabelecer uma base matemática rigorosa para propriedades frequentemente utilizadas de maneira intuitiva na prática, mas que requerem validação formal para garantir consistência em cenários mais complexos.

A verificação da condição de finitude da energia do sinal resultante é particularmente significativa na teoria de sinais, uma vez que diversos sistemas físicos e de comunicação demandam que os sinais envolvidos apresentem energia limitada, assegurando estabilidade, interpretabilidade e viabilidade de implementação. Por exemplo, em sistemas de comunicação digital, sinais com energia infinita seriam inviáveis de transmitir e processar; em filtros de áudio, a manutenção da energia finita garante que o sinal processado não introduza distorções incontroláveis; e em circuitos de controle, sinais com energia limitada são fundamentais para evitar oscilações indesejadas e assegurar o funcionamento estável do sistema.

Adicionalmente, a análise das integrais associadas à representação espectral de sinais contribui tanto para o aprofundamento teórico quanto para a prática em sistemas lineares invariantes no tempo (LIT). Dessa forma, o estudo reforça a importância de fundamentos matemáticos sólidos na compreensão dos fenômenos relacionados à convolução e à Transformada de Fourier.

Metodologia

A pesquisa foi desenvolvida a partir de uma abordagem teórica e analítica, estruturada em etapas. Inicialmente foi realizada uma revisão de conceitos fundamentais da teoria de sinais, com foco na distinção de sinais de energia finita e sinais absolutamente integráveis, adotando a definição matemática de funções, para os sinais. Em seguida, aprofundou-se o estudo da operação de convolução em tempo contínuo e da Transformada de Fourier, considerando suas propriedades e condições de existência.

Na etapa seguinte, aplicaram-se ferramentas da Análise Matemática, como o Teorema de Rayleigh (ou Parseval), o Teorema da Convolução, o Teorema de Fubini e a desigualdade do triângulo para integrais. Essas ferramentas permitiram demonstrar, de forma rigorosa, a finitude da energia do sinal obtido pela convolução entre um sinal com energia finita e outro absolutamente integrável.

Como suporte, utilizaram-se softwares de cálculo simbólico, como Wolfram Mathematica e wxMaxima, para validação de integrais e manipulações algébricas. Paralelamente, empregou-se a linguagem LaTeX para a redação do texto matemático e organização formal dos resultados.

Por fim, foi construída uma análise complementar a partir de um contraexemplo, com o objetivo de verificar a validade das hipóteses adotadas. Essa etapa evidenciou que, caso se assuma apenas energia finita para o sinal $h(t)$, ou seja, na ausência da condição de integrabilidade absoluta, a convolução pode resultar em sinais com energia infinita, reforçando a necessidade das condições assumidas.

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

Resultados e discussão

A análise desenvolvida confirmou que, sob as hipóteses estabelecidas — um sinal de energia finita convoluido com um sinal absolutamente integrável —, o sinal resultante possui energia finita.

No domínio do tempo, considerou-se a definição de energia de um sinal contínuo:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt, \text{ com } y(t) = x(t) * h(t).$$

Onde $y(t)$ é a convolução do sinal $x(t)$ com $h(t)$ segundo OPPENHEIM e WILLISKY (2010), que é definida por:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau,$$

essa operação é essencial em sistemas de controle e processamento de sinais, pois permite decompor sinais complexos em componentes simples para análise.

No domínio da frequência, a aplicação do Teorema de Rayleigh (ou Parseval) reescreveu a energia como:

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega,$$

onde, pelo Teorema de Fubini, ao inverter a ordem das integrais envolvidas e aplicar mudanças de variáveis que levaram à forma clássica do Teorema da Convolução:

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega).$$

Assim, obteve-se:

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \cdot |H(\omega)|^2 d\omega.$$

Utilizando o enunciado de Lima (2019) para a Desigualdade do Triângulo para Integrais:

$$|H(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt,$$

foi possível concluir que $|H(\omega)|^2 \leq K$, com K constante positiva. Portanto,

$$E_y \leq \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega,$$

e como $x(t)$ possui energia finita por hipótese, $E_y < \infty$.

A investigação de contraexemplos mostrou que, ao retirar a condição de integrabilidade absoluta de $h(t)$, a convolução pode gerar sinais de energia infinita, mesmo que $x(t)$ e $h(t)$ individualmente possuam energia finita. Esse resultado evidencia que as hipóteses adotadas não são apenas convenientes, mas indispensáveis para a validade da conclusão.

Os cálculos simbólicos realizados em softwares como Mathematica e wxMaxima ilustraram os resultados teóricos para sinais específicos ao longo do trabalho, bem como foram usados para se obter os contraexemplos.

Conclusões

A pesquisa demonstrou, de forma rigorosa, que a convolução entre um sinal de energia finita e um sinal absolutamente integrável resulta necessariamente em um sinal também de energia finita. Esse resultado foi obtido a partir da aplicação do Teorema da Convolução, do Teorema de Rayleigh (Parseval), do Teorema de Fubini e da desigualdade do triângulo para integrais, assegurando a consistência matemática da demonstração.

Verificou-se, ainda, que a condição de integrabilidade absoluta não pode ser descartada: ao removê-la, é possível construir contraexemplos em que a convolução gera sinais de energia infinita, mesmo que os sinais originais possuam energia finita. Isso evidencia que as hipóteses assumidas são essenciais para a validade do resultado.

Além da contribuição teórica, o trabalho fortaleceu a formação acadêmica por meio do uso de ferramentas computacionais (Mathematica e wxMaxima) e da prática de redação científica em LaTeX, destacando o papel da iniciação científica na consolidação de fundamentos matemáticos aplicados à engenharia e ao estudo de sinais e sistemas.

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

Agradecimentos

O autor agradece à Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) pela oportunidade de desenvolvimento do presente trabalho no âmbito do Programa Institucional Voluntário de Iniciação Científica (PIVIC).

Um agradecimento especial é dirigido ao professor orientador desta pesquisa pela oportunidade de desenvolvê-la, bem como pelo acompanhamento, incentivo e pelas contribuições fundamentais em todas as suas etapas.

O autor também expressa reconhecimento ao Instituto de Ciência e Tecnologia e ao Instituto de Ciências Puras e Aplicadas, pelo suporte acadêmico e pela infraestrutura disponibilizada.

Por fim, agradece-se à disponibilidade do software *Wolfram Mathematica*, cuja licença institucional é fornecida pela UNIFEI sob a responsabilidade dos professores Rodrigo Silva Lima (IMC) e Alan Bendasoli Pavan (IFQ). Embora utilizado de forma pontual, o software foi importante na verificação de integrais mais complexas, em conjunto com o software livre *wxMaxima*, também empregado em cálculos simbólicos e validações.

Referências

LIMA, E. L. Curso de Análise: Volume 1. 15ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. 320 p. ISBN 978-85-244-0468-9

NAHIN, P. J. Inside Interesting Integrals: A Collection of Sneaky Tricks, Sly Substitutions, and Numerous Other Stupendously Clever, Awesomely Wicked, and Devilishly Seductive Techniques for Solving Integrals. New York: Springer, 2015. (Undergraduate Lecture Notes in Physics). ISBN 978-1-4939-1276-6.

OPPENHEIM, A.; WILLSKY, A. Sinais e Sistemas. São Paulo: Pearson Universidades, 2010. ISBN 9788576055044.