

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

Um estudo sobre eletrodinâmica não-linear nas vizinhanças de objetos compactos

Gabriel de Almeida Porto (IC)¹, Eduardo Henrique Silva Bittencourt (PQ)¹

¹Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)

Palavras - Chave: Objetos compactos. Campos magnéticos. Relatividade geral. Eletrodinâmica não-linear.

Introdução

No contexto da evolução estelar, os objetos compactos surgem como remanescentes do colapso gravitacional de estrelas massivas, originando três classes principais: anãs brancas, estrelas de nêutrons e buracos negros. Essas estruturas extremas se caracterizam não apenas por suas altas densidades, mas também por apresentarem intensos campos magnéticos, os quais, em muitas situações, podem ser bem descritos por uma configuração do tipo dipolo (Shapiro e Teukolsky 1983). Devido à presença simultânea de campos gravitacionais intensos e campos eletromagnéticos fortes, a descrição teórica desses sistemas exige o uso das equações de Einstein da Relatividade Geral acopladas às equações de movimento do campo eletromagnético numa dinâmica não-linear.

Soluções para o sistema Einstein-Maxwell que descrevem campos magnéticos do tipo dipolar já são conhecidas na literatura, como a solução de Gutsunaev-Manko (Gutsunaev e Manko 1988). No entanto, tal solução assume linearidade nas equações do eletromagnetismo e, mesmo assim, os efeitos retroativos do campo sobre a métrica só se tornam relevantes para intensidades da ordem de $10^{15}G$ (Formighieri 2015). Assim consideremos objetos com campos magnéticos tal que desacoplemos as equações de campo de Einstein com as equações de movimento da eletrodinâmica não-linear, considerando apenas o acoplamento mínimo entre gravitação e campo magnético.

Metodologia

Antes de apresentar o procedimento utilizado, estabelecemos as definições e convenções adotadas ao longo deste trabalho. Consideramos um espaço-tempo com assinatura $(+, -, -, -)$ e unidades naturais $c = G = 1$, onde G é a constante gravitacional e c a velocidade da luz no vácuo. O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci R são calculadas via métrica $g_{\mu\nu}$ usando a conexão de Levi-Cevita, onde os índices gregos são de espaço-tempo $(\mu, \nu \dots = 0, 1, 2, 3)$, o determinante da métrica será denotado por $\sqrt{-g}$. Por fim o objeto usado para descrever

o campo eletromagnético é o tensor de Faraday, que pode ser escrito em termos de um potencial vetor,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1)$$

a partir deste objeto podemos construir o invariante que denotaremos por $F \equiv F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ (Bazin, Schiffer e Adler 1965). Também podemos definir o dual do tensor de Faraday dado por,

$$*F^{\mu\nu} = \frac{-\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}}{2\sqrt{-g}}, \quad (2)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o símbolo de permutação no espaço-tempo, onde assume $+1$ para permutações pares de (0123) , -1 para permutações ímpares e 0 quando houver repetição de índice.

Para o estudo do campo magnético no entorno de objetos compactos usaremos as equações da eletrodinâmica não-linear desacoplada com as equações de campo de Einstein, i.e o tensor momento energia do campo magnético é tal que não afeta o espaço-tempo, assim temos o seguinte conjunto de equações para resolver,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0, \quad (3)$$

$$\partial_\mu (\sqrt{-g}\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}) = 0, \quad (4)$$

$$\partial_\mu (\sqrt{-g}*F^{\mu\nu}) = 0, \quad (5)$$

onde $\mathcal{L}_F \equiv \partial_F \mathcal{L}$ (Novello e Goulart 2010). Dado que nosso objetivo é descrever o campo magnético externo às estrelas — ou seja, em uma região de vácuo — e que os efeitos gravitacionais do campo eletromagnético podem ser desprezados a menos de campos extremos, adotamos como aproximação de fundo o espaço-tempo de Schwarzschild, cujo elemento de linha é (Bazin, Schiffer e Adler 1965),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 d\Omega^2, \quad (6)$$

onde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Assim, as equações do campo eletromagnético desacopladas da gravidade passam a ser analisadas sobre esse fundo fixo. Em particular, a equação (7) assume, nesse caso, a forma,

$$\partial_\mu (r^2 \sin\theta \mathcal{L}_F F^{\mu\nu}) = 0. \quad (7)$$

Buscaremos soluções do tipo dipolo magnético em uma teoria de eletrodinâmica não linear (NLED) a qual incorpora correções quadráticas na Lagrangeana da eletrodinâmica de Maxwell,

$$\mathcal{L} = \frac{-F}{4} + \alpha F^2, \quad (8)$$

onde α é uma constante relacionada aos efeitos da NLED (Novello e Goulart 2010).

Para modelar um campo magnético do tipo dipolar, assumimos as mesmas hipóteses de simetria utilizadas na magnetostática clássica e linear. Especificamente, consideramos simetria axial, de modo que o potencial vetor dependa apenas das coordenadas r e θ , e tenha apenas uma componente não nula, A_ϕ . Assim, o potencial vetor pode ser escrito como (Jackson 1998),

$$A_\mu = (0, 0, 0, A_\phi) = (0, 0, 0, A(r, \theta)). \quad (9)$$

Com essa escolha, o tensor de Faraday terá apenas as seguintes componentes não nulas,

$$F_{13} = \partial_r A_\phi, \quad (10)$$

$$F_{23} = \partial_\theta A_\phi, \quad (11)$$

o invariante F com as hipóteses enunciadas até agora será da forma,

$$F \equiv 2 \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{(F_{13})^2}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{(F_{23})^2}{r^4 \sin^2\theta} \right]. \quad (12)$$

Substituindo o (12) e (8) na equação (7) obteremos uma equação diferencial parcial não-linear com termos cúbicos em (10) e (11), assim resolver de forma analítica é inviável. No entanto, podemos aplicar o método das aproximações sucessivas para resolvê-la. Para isso, utilizamos os parâmetros livres da nossa equação: a massa do objeto (m) e o parâmetro da eletrodinâmica não linear (α). Assim, escrevemos o potencial vetor A_ϕ como,

$$A_\phi = A^{(0)} + mA^{(1)} + \alpha A^{(2)} + \sigma(m, \alpha). \quad (13)$$

Consequentemente, desprezamos todos os termos de ordem quadrática nos parâmetros e reescrevemos o operador diferencial em termos desses parâmetros, ou seja, como uma parte linear mais correções,

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}^{(0)} + m\mathcal{O}^{(1)} + \alpha\mathcal{O}^{(2)} + \sigma(m, \alpha), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}^{(0)} A^{(0)} + m \left[\mathcal{O}^{(0)} A^{(1)} + \mathcal{O}^{(1)} A^{(0)} \right] + \\ & \alpha \left[\mathcal{O}^{(0)} A^{(2)} + \mathcal{O}^{(2)} A^{(0)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Para que essa igualdade seja satisfeita para todo m e α , cada termo deve anular-se separadamente. Assim, obtemos um sistema hierárquico de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \mathcal{O}^{(0)} A^{(0)} = 0, \\ \mathcal{O}^{(0)} A^{(1)} + \mathcal{O}^{(1)} A^{(0)} = 0, \\ \mathcal{O}^{(0)} A^{(2)} + \mathcal{O}^{(2)} A^{(0)} = 0. \end{cases}$$

Esse sistema permite resolver a equação completa de forma iterativa: primeiro resolve-se a equação homogênea para $A^{(0)}$; em seguida, com $A^{(0)}$ conhecido, resolve-se a equação para $A^{(1)}$, e assim por diante (Landau e Lifshitz 1976). reescrevendo a EDP com essas aproximações e montando o sistema de equações diferenciais obtemos para ordem linear,

$$\frac{\partial_r^2 A^{(0)}}{\sin\theta} + \partial_\theta \left(\frac{\partial_\theta A^{(0)}}{r^2 \sin\theta} \right) = 0. \quad (16)$$

Para resolvê-la, utilizamos o método de separação de variáveis, assumindo uma solução da forma,

$$A^{(0)} = R(r)\Theta(\theta), \quad (17)$$

substituindo essa forma na equação (17) e separando as variáveis, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas por uma constante de separação $l(l+1)$ (Arfken e Weber 2005),

$$R''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0, \quad (18)$$

$$\Theta''(\theta) - \cot\theta \Theta'(\theta) + l(l+1)\Theta(\theta) = 0. \quad (19)$$

A equação (17) corresponde a EDO de Euler-Cauchy, onde a solução geral é da forma (Arfken e Weber 2005),

$$R(r) = C_1 r^{l+1} + C_2 r^{-l}. \quad (20)$$

A partir da equação (19), realizamos a mudança de variável $x = \cos\theta$, de modo que a equação assume a forma,

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{1-x^2} \Theta = 0, \quad (21)$$

comparando-a com a equação diferencial associada aos polinômios de Legendre, podemos expressar a solução em termos desses polinômios de modo que a equação seja identicamente satisfeita,

$$\Theta(x) \equiv \Phi_l(x) = (1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx}, \quad (22)$$

onde $P_l(x)$ denota o polinômio de Legendre de ordem l (Kerner et al. 2024).

Assim, a solução geral da equação diferencial parcial (EDP) para $A^{(0)}$ pode ser escrita na forma de uma expansão multipolar,

$$A^{(0)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l' r^{l+1} + C_l r^{-l} \right) \Phi_l(x). \quad (23)$$

Aplicando a condição de que o campo deve desaparecer no infinito, impomos $C_l' = 0$. Além disso queremos descrever o campo de um dipolo-magnético para isto truncamos a série em $l = 1$, e a solução acima se reduz em,

$$A^{(0)} = \frac{-\mathbf{C}(x^2 - 1)}{r}. \quad (24)$$

Tendo a solução de ordem linear é possível determinar as ordens seguintes assumindo que as soluções sejam da forma,

$$A^{(1)} = \frac{G(\theta)}{r^2}, \quad (25)$$

$$A^{(2)} = \frac{H(\theta)}{r^7}, \quad (26)$$

substituindo nas equações a parte radial é satisfeita de imediato e temos as equações para parte angular, que com a mesma substituição de variável ($x = \cos \theta$), obtemos as seguintes EDO's,

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{6}{1-x^2} G + 6\mathbf{C} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{56}{1-x^2} H + 128(\mathbf{C})^3 + 64(\mathbf{C})^3 x^2 = 0, \quad (28)$$

note que ambas equações tem a parte homogênea correspondente a equação (21), porém para (27) temos $l = 2$ que corresponde uma contribuição de quadrupolo e para (28) temos $l = 7$ que corresponde a uma contribuição do tipo 7-polo (Kerner et al. 2024), onde suas respectivas soluções com a parte não-homogênea são,

$$A^{(1)} = -\frac{3x(x^2 - 1)}{r^2} - \frac{3\mathbf{C}(1 - x^2)}{2r^2}, \quad (29)$$

$$A^{(2)} = -\frac{7(5 - 140x^2 + 630x^4 - 924x^6 + 429x^8)}{16r^7} + \frac{16\mathbf{C}^3(-43 + 16x^2 + 27x^4)}{297r^7}. \quad (30)$$

Resultados e discussão

Calculado todas as ordens do potencial vetor se obtém usando as equações (10) e (11) as componentes não nulas do tensor de Faraday de um campo magnético do tipo dipolo perturbado numa eletrodinâmica não-linear acoplada com a métrica de Schwarzschild são da forma,

$$F_{13} = -\frac{\mathbf{C} \sin^2 \theta}{r^2} - \frac{2m}{r^3} \left[3 \cos \theta \sin^2 \theta - \frac{3\mathbf{C} \sin^2 \theta}{2} \right] - \frac{7\alpha}{r^8} \left[-\frac{7(5 - 140 \cos^2 \theta + 630 \cos^4 \theta)}{16} \right] + \frac{7\alpha}{r^8} \left[-\frac{7(-924 \cos^6 \theta + 429 \cos^8 \theta)}{16} \right] + \frac{7\alpha}{r^8} \left[\frac{16\mathbf{C}^3(-43 + 16 \cos^2 \theta + 27 \cos^4 \theta)}{297} \right], \quad (31)$$

$$F_{23} = \frac{2\mathbf{C} \cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{m}{r^2} [6 \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \sin^3 \theta] + \frac{m}{r^2} [-3\mathbf{C} \cos \theta \sin \theta] + \frac{\alpha}{r^7} \left[-\frac{7(280 \cos \theta \sin \theta)}{16} \right] + \frac{\alpha}{r^7} \left[-\frac{7(-2520 \cos^3 \theta \sin \theta)}{16} \right] + \frac{\alpha}{r^7} \left[-\frac{7(5544 \cos^5 \theta \sin \theta - 3432 \cos^7 \theta \sin \theta)}{16} \right] + \frac{\alpha}{r^7} \left[\frac{16\mathbf{C}^3(-32 \cos \theta \sin \theta - 108 \cos^3 \theta \sin \theta)}{297} \right], \quad (32)$$

com o tensor de Faraday podemos obter o campo magnético correspondente, uma vez que numa abordagem covariante o campo magnético medido por um observador é a projeção do dual do tensor de Faraday sob um dado campo de observadores no espaço-tempo, escolhendo os observadores tal que $u^\alpha u_\alpha = 1$ e o campo de velocidades da forma $u_\alpha = (u_0, 0, 0, 0)$, considerando o espaço-tempo de Schwarzschild o campo será (Novello e Goulart 2010),

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{g^{00}}} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad (33)$$

a expressão para o campo magnético será da forma,

$$B^\mu = *F^{\mu\beta} u_\beta, \quad (34)$$

calculando o dual do tensor de Faraday, utilizando o observador considerado acima e usando a métrica para descer o índice e obter o vetor campo magnético, assim obtemos as seguintes componentes não nulas (Kerner et al. 2024),

$$B_r = \frac{-F_{23}}{r^2 \sin \theta} \left(1 + \frac{2m}{r} \right), \quad (35)$$

$$B_\theta = \frac{F_{13}}{\sin \theta} \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (36)$$

com o vetor campo magnético calculado podemos graficar as linhas de campo,

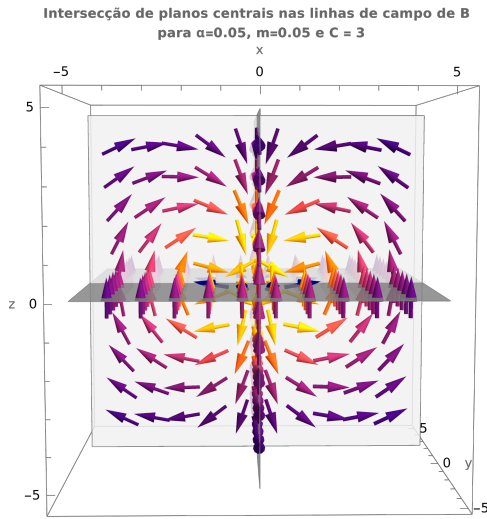


Figura 1: Gráfico das linhas de campo magnético cortado por planos centrais.

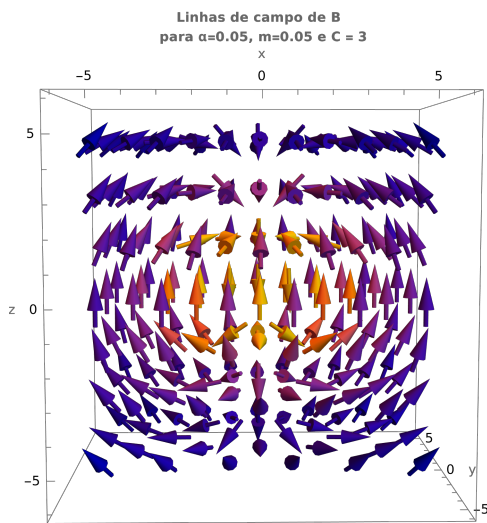


Figura 2: Gráfico das linhas de campo magnético.

Conclusões

Neste trabalho, foi investigado o comportamento de campos magnéticos dipolares nas proximidades de objetos compactos, utilizando uma eletrodinâmica não-linear em um espaço-tempo de Schwarzschild.

Adotando uma lagrangeana com correções quadráticas para a eletrodinâmica de Maxwell e aplicando o método de aproximações sucessivas, foi possível solucionar as complexas equações de campo de forma iterativa. Foram obtidas soluções para o potencial vetor em diferentes

ordens de aproximação.

Os resultados culminaram na derivação das componentes do tensor de Faraday e do vetor campo magnético, que incorporam as perturbações gravitacionais e não-lineares. A análise dessas soluções revelou contribuições de multipolos superiores, como quadrupolo e 7-polo, que deformam a configuração dipolar padrão. A representação gráfica das linhas de campo magnético ilustra visualmente como a interação entre a gravidade do objeto compacto e os efeitos da eletrodinâmica não-linear modificam o campo, oferecendo uma descrição mais precisa dos campos magnéticos em ambientes astrofísicos extremos, como os encontrados ao redor de estrelas de nêutrons e buracos negros.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq, em particular, pelo auxílio financeiro fornecido por meio do programa PIBIC e a UNIFEI por toda infraestrutura fornecida.

Referências

- S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, Wiley, 1983, ISBN 978-0471873166.
- Ts. I. Gutsunaev, V. S. Manko, *New Static Solutions of the Einstein–Maxwell Equations*, *Phys. Lett. A* **132**, 85–87 (1988).
- G. Formighieri, *O Espaço-Tempo de um Dipolo Magnético*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2015. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/135257>.
- M. Bazin, M. Schiffer, R. Adler, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
- M. Novello, E. Goulart, *Eletrodinâmica Não-Linear: Causalidade e Efeitos Cosmológicos*, Editora Livraria da Física, 2010, ISBN 978-85-7861-067-8.
- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, Wiley, 1998.
- L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mecânica*, 3ª edição, Elsevier Editora Ltda., Curso de Física Teórica, vol. 1, Rio de Janeiro, 1976.
- G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th edition, Academic Press, 2005.
- R. Kerner, G. Koekoek, J. Schuring, J.-W. van Holten, *Polar Magnetic Fields in Black-Hole Space-Times*, *arXiv:2407.04975*, 2024. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/2407.04975>.