

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”**A SOLUÇÃO DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF (TOV) E SUAS APLICAÇÕES.**Gabriel Lambsteim Moraes¹ (IC), Vitorio Alberto De Lorenci (PQ)¹¹Instituto de Física e Química, Universidade Federal de Itajubá.**Palavras-chave: Buracos negros primordiais. Estrelas de nêutrons. Órbitas em meios contínuos. Relatividade geral. Solução de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.****Introdução**

Este trabalho investiga a gravitação em distribuições contínuas de massa, com ênfase na análise de órbitas de buracos negros primordiais (PBHs) dentro de estrelas.

Pode-se pensar que estrelas que estejam em um estado ligado com um PBH tenham uma vida curta e caótica devido a acreção e instabilidade resultantes em seu interior, mas estudos mostram que as consequências dependem fundamentalmente da massa do PBH e do tipo de estrela.

No caso de estrelas comuns, como o Sol, assume-se que um PBH estaria presente desde a formação estelar, visto que a captura dinâmica é um evento de baixa probabilidade¹. Um estudo de evolução mostra que PBHs de massa pequena não influenciam a vida da estrela, enquanto os mais massivos não encurtam significativamente a vida útil, mas induzem fases evolutivas exóticas e possivelmente observáveis¹.

Já para estrelas de nêutrons, sua altíssima densidade torna a captura algo muito mais provável²⁻³. Uma vez capturado, o PBH passaria por uma longa fase de travessias altamente excêntricas pelo núcleo, gradualmente perdendo energia através das forças dissipativas, que se mostram ineficazes em circularizar sua trajetória, que permanece altamente excêntrica. Eventualmente, o PBH se torna confinado a uma órbita elíptica muito pequena, contida nas regiões mais densas do núcleo²⁻³. É a partir desta fase final de órbitas, ainda excêntricas, que o processo de acreção se acelera dramaticamente até consumir a estrela em uma escala de tempo menor que sua vida, gerando um sinal de ondas gravitacionais contínuo e com modulação característica, que podem potencialmente ser detectadas apesar das grandes distâncias envolvidas²⁻³.

O objetivo deste trabalho é a derivação das equações de movimento de uma partícula teste sob a óptica da Relatividade Geral e, utilizando simulações numéricas, comparar as órbitas resultantes com as de um tratamento

Newtoniano⁴, a fim de analisar os efeitos relativísticos. O interesse jaz na hipótese de que PBHs compõem a matéria escura e cuja interação com estrelas comuns próximas, como o Sol, ou com objetos compactos como estrelas de nêutrons podem gerar assinaturas em ondas gravitacionais detectáveis observacionalmente⁵.

Para isso, foi realizada uma revisão aprofundada da mecânica orbital Newtoniana⁶, seguida do estudo da teoria da Relatividade Geral, sua aproximação de campo fraco e suas soluções⁷⁻⁹, com foco na solução de Tolman-Oppenheimer-Volkoff¹⁰⁻¹¹, que pode ser usada para modelar o interior estelar. Usando a métrica dessa solução, foram derivadas as equações de movimento para uma partícula teste na métrica associada a solução TOV, que então serão implementadas em simulações numéricas¹² para mapear suas trajetórias e evidenciar os efeitos relativísticos nas órbitas de PBHs.

Metodologia

Inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica aprofundada da mecânica orbital Newtoniana conforme descrita no capítulo 13 da obra de Alonso e Finn⁶. Esse embasamento é crucial para estabelecer o modelo clássico que serve como base de comparação para os resultados relativísticos.

A segunda etapa consistiu no estudo da teoria da Relatividade Geral partindo de seus fundamentos matemáticos, onde o referencial teórico mais utilizado foi a obra de Foster e Nightingale⁷, com as obras de Landau⁸ e Wald⁹ servindo para um aprofundamento maior. Foi dada muita ênfase na aproximação de campo fraco da teoria e nas soluções das equações de Einstein. O estudo culminou na análise detalhada da solução de Tolman-Oppenheimer-Volkoff utilizando os artigos originais¹⁰⁻¹¹, cuja escolha foi motivada pela sua habilidade de descrever interiores estelares de maneira relativística.

Após a base matemática estar bem fundamentada, foram derivadas as equações de movimento para uma partícula

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

teste na métrica associada a solução TOV (representando o PBH no interior estelar), que resultou em um sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas que descrevem a evolução das coordenadas da partícula.

Finalmente, essas equações serão resolvidas utilizando métodos numéricos, devido à sua natureza não-linear. Simulações computacionais serão realizadas para traçar as órbitas dos PBHs sob diferentes condições iniciais e em diferentes interiores estelares. Os resultados obtidos irão então servir de base para comparação às soluções orbitais obtidas via um tratamento Newtoniano anterior⁴, permitindo a identificação de desvios e efeitos de natureza relativística. A solução das equações, assim como as simulações, serão implementadas com o auxílio do software Mathematica (versão 14.2)¹².

Resultados e discussão

O principal resultado obtido até o momento foi a derivação bem-sucedida das equações de movimento para uma partícula teste, que representam a evolução das coordenadas de um PBH no espaço-tempo de uma esfera de fluido estática e esféricamente simétrica. Para tal, foi utilizada a geometria descrita pela solução TOV¹⁰⁻¹¹, apropriada para modelar até mesmo o interior de estrelas de nêutrons de altíssima densidade. As equações resultantes formam um sistema complexo de equações não-lineares acopladas, cuja solução analítica não é trivial.

A implementação de simulações computacionais, que consiste na resolução desse sistema para traçar as órbitas associadas sob diferentes condições iniciais, se encontra em andamento. Espera-se que essas simulações revelem desvios significativos em relação às órbitas previstas pela gravitação Newtoniana, especialmente nos regimes de campo forte nas redondezas de estrelas de nêutrons. A discussão preliminar sugere que as correções relativísticas serão quase desprezíveis para estrelas comuns e muito pronunciadas, através da precessão do periastro da órbita, para estrelas de nêutrons.

A análise dessas correções permitirá avaliar em que condições as aproximações clássicas deixam de ser válidas. Adicionalmente, obter essas órbitas pode fornecer fundamentação para futuros trabalhos que buscam calcular assinaturas de PBHs capturados por objetos compactos, estas quais podem ser detectáveis em

ondas gravitacionais, contribuindo para o debate sobre a sua viabilidade como candidatos à matéria escura.

Conclusões

O presente trabalho estabeleceu a fundamentação teórica para estudar a dinâmica orbital de PBHs no interior de estrelas sob a óptica da Relatividade Geral. O principal resultado obtido até o momento foi a derivação das equações de movimento para uma partícula teste na geometria descrita pela solução TOV, que modela um fluido estático e esféricamente simétrico. Tal formalismo representa um avanço ao tratamento puramente Newtoniano, permitindo uma análise mais precisa dos efeitos gravitacionais em regimes de campo forte.

Embora as simulações computacionais para a obtenção das órbitas ainda estejam em andamento, conclui-se que o arcabouço desenvolvido é robusto e serve como base para a próxima fase da pesquisa. A expectativa é de que os resultados numéricos evidenciem correções de natureza relativística, como a precessão do periastro orbital, as quais não são previstas pela teoria clássica.

Trabalhos futuros poderão utilizar a fundamentação aqui obtida para analisar a possibilidade da existência de sinais característicos presentes em ondas gravitacionais geradas por objetos compactos.

Agradecimentos

O autor agradece ao seu orientador, Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci, pela valiosa orientação; à Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) pela infraestrutura; e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Referências

1. BELLINGER, Earl P. et al. Solar Evolution Models with a Central Black Hole. **The Astrophysical Journal**, [s. l.], v. 959, n. 113, p. 1-14, 20 dez. 2023. DOI: 10.3847/1538-4357/ad04de. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad04de>.
2. BAUMGARTE, Thomas W.; SHAPIRO, Stuart L. **Primordial black holes captured by neutron stars: relativistic point-mass treatment**. 2024. Preprint (arXiv:2404.08735). Disponível em:

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

- <https://arxiv.org/abs/2404.08735>.
3. CAIOZZO, Roberto; BERTONE, Gianfranco; KÜHNEL, Florian. **Revisiting Primordial Black Hole Capture by Neutron Stars**. 2024. Preprint (arXiv:2404.08057). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2404.08057>.
 4. DE LORENCI, VITORIO A.; KAISER, DAVID I.; PETER, PATRICK. **Orbital motion of primordial black holes crossing Solar-type stars**. 2024. Preprint (arXiv:2405.08113). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2405.08113>.
 5. DE LORENCI, VITORIO A. et al. **Gravitational wave signals from primordial black holes orbiting solar-type stars**. 2025. Preprint (arXiv:2504.07517). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2504.07517>.
 6. ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física: um curso universitário**. São Paulo: Edgard Blücher, 2018.
 7. FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. D. **A Short Course in General Relativity**. New York: Springer, 2006.
 8. LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980.
 9. WALD, R. M. **General Relativity**. Chicago: University of Chicago Press, 1984.
 10. TOLMAN, Richard C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. **Physical Review**, Pasadena, v. 55, p. 364-373, 15 fev. 1939.
 11. OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On Massive Neutron Cores. **Physical Review**, Berkeley, v. 55, p. 374-381, 15 fev. 1939.
 12. WOLFRAM RESEARCH, Inc. **Mathematica**. Versão 14.2. Champaign, IL: Wolfram Research, Inc., 2024.