INTRODUÇÃO AO POLINÔMIOS DE LEGENDRE APLICAÇÕES

Jeysa Cristina Alves de Souza (IC)[1], Luana de Lima Silva Ribeiro (PQ)[1]

[1]*Universidade Federal de Itajubá.*

Palavras-chave: Fórmula de Rodrigues. Polinômios ortogonais. Relação de recorrência

Introdução

Os polinômios ortogonais são uma classe de funções matemáticas que desempenham um papel fundamental em várias áreas da matemática aplicada, estatística e ciência de dados. Eles são definidos em relação a um produto interno específico, que determina a ortogonalidade entre os polinômios.

Esse conceito matemático surgiu no final do século XIX, o desenvolvimento e estudo mais aprofundado desses polinômios ocorreu ao longo do século XX, com contribuições de diversos matemáticos, um deles foi Adrien-Marie Legendre um matemático francês do século XVIII e XIX, conhecido pelas suas contribuições à estatística, teoria dos números, análise matemática e, especialmente, pela relevante classe de polinômios denominada de Polinômios de Legendre.

O objetivo desta Iniciação Científica é estudar os polinômios ortogonais de Legendre definidos pela fórmula:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \qquad (1)$$

explorar algumas de suas aplicações, aprender a utilizar o software Wolfram Mathematica e o aprendizado do LaTeX como ferramenta para produção de documentos acadêmicos.

Esta pesquisa se justifica pela ampla aplicação do tema que engloba matemática, física e engenharias. Por exemplo, podemos citar a utilização do polinômios de Legendre nos trabalhos de Gutiérrez et al. (2025) que propõe um modelo para otimizar o processo de fermentação visando maximizar a produção de álcool e, também no trabalho de Cajal (2016), que trata da estimativa de erros volumétricos em uma impressão 3D.

O método combinou um estudo teórico com simulações computacionais e seminários semanais.

Metodologia

Este trabalho de pesquisa teve início com o aprofundamento de conceitos de Álgebra Linear através de revisão bibliográfica e seminários semanais com a orientadora.

Em seguida, através da utilização de referências especializadas focamos nas propriedades básicas dos polinômios ortogonais de Chebyshev e de Legendre. Como parte da formação, foi realizada uma introdução ao uso do LaTeX, visando a produção de textos científicos com formatação adequada. Juntamente a uma introdução ao Wolfram Cloud, utilizado como ferramenta principal para a construção e implementação de algoritmos e produção de gráficos.

Ao longo do projeto, foram realizados estudos individuais e apresentações de seminários semanais com a orientadora para resolução de dúvidas e verificação das propriedades teóricas, nos quais os principais tópicos de estudo eram discutidos e aprofundados, permitindo um acompanhamento contínuo do progresso da pesquisa.

Do ponto de vista computacional, desenvolvemos algoritmos no Wolfram Cloud para gerar os polinômios de Legendre de três formas distintas, ilustramos algumas de suas propriedades através de gráficos e exploramos sua aplicação no cálculo de integrais.

Resultados e discussão

Iniciamos este projeto de iniciação científica com as revisão de Álgebra Linear que incluiu o estudo teórico do processo de ortogonalização de Gram - Schmidt, e a implementação deste processo de ortogonalização no Wolfram Cloud. Mais especificamente consideremos o conjunto linearmente independente $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ e o produto interno:

(2) $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

para gerar os polinômios de Legendre.

Os polinômios de Legendre podem ser gerados de diferentes formas. Além do processo de ortogonalização de Gram - Schmidt, eles podem ser obtidos pela equação (1), que é nomeada de *fórmula de Rodrigues* e através de uma relação de recorrência, a seguir:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)\,x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)$$

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x.$$

Consideramos o estudo das três representações, realizamos simulações a fim de comparar o tempo de geração dos polinômios utilizando o processo de ortogonalização de Gram - Schmidt, a fórmula de Rodrigues e a relação de recorrência. As simulações foram implementadas no Wolfram Cloud, por meio da função Absolute Timing, empregando um computador ThinkPad com processador Intel Core i5 de 10ª geração.

Utilizando a fórmula de Rodrigues deduzimos várias equações de primeira ordem, como por exemplo:

(4) $$(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

e a de segunda ordem, como por exemplo:

(5) $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Essas equações diferenciais, tanto de primeira quanto de segunda ordem, constituem algumas das principais propriedades dos polinômios de Legendre.

A Tabela 1 apresenta o tempo de processamento, em segundos, obtido para cada método de geração dos polinômios, possibilitando a comparação de desempenho entre as três abordagens.

n	*10*	*20*	*50*
Fórmula de Rodrigues	0.000464	0.000921	0.243400
*Gram - Smichd*t	0.574958	3.769680	—
Relação de Recorrência	0.006596	0.016036	0.579965

Tabela 1 - Métodos de geração dos polinômios ortogonais e tempo de processamento (em segundos)

As simulações apresentadas foram restritas a valores moderados de n, devido às limitações da versão gratuita do Wolfram Cloud, após o vencimento da chave institucional do Wolfram Alpha/UNIFEI em março de 2025. Observa-se que o algoritmo de Gram-Schmidt não conseguiu gerar até $n = 50$ polinômios, em virtude dessas restrições. Após testes adicionais, verificou-se que o algoritmo baseado na relação de recorrência mostrou-se eficaz, pois, mesmo diante das limitações da plataforma, foi capaz de gerar até $n = 500$ polinômios.

Também estudamos propriedades dos zeros dos $P_n(x)$ mostrando que eles são simples, estão contidos no intervalo *[-1,1]* e possuem a propriedade do entrelaçamento, isto é, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau n existe um zero de grau *n-1*. A seguir ilustramos esta propriedade usando o Wolfram Cloud.

A Figura 1 apresenta a ilustração da propriedade de entrelaçamento dos zeros dos polinômios de Legendre de graus 3 e 4. Observa-se que, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau 4, existe sempre um zero correspondente do polinômio de grau 3, confirmando a propriedade de entrelaçamento.

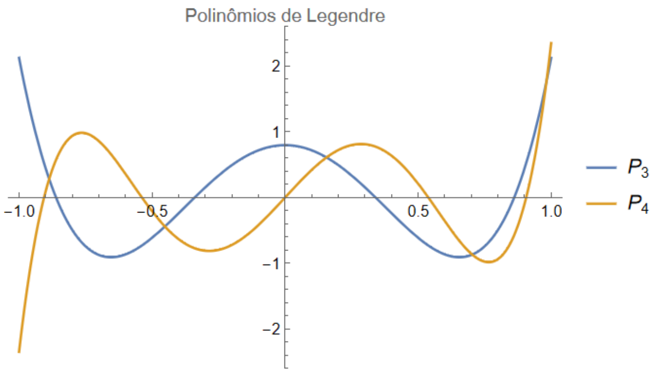

Figura 1 – Ilustração do entrelaçamento dos zeros dos polinômios de grau 3 e 4.

No estudo dos polinômios, exploramos também algumas propriedades similares dos polinômios de Chebyshev, tais como a relação de recorrência e a relação de ortogonalidade. Diferentemente dos polinômios de Legendre, o produto interno que define a ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev é dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \tag{6}$$

A aplicação estudada neste trabalho consistiu na utilização dos polinômios de Legendre para a construção da quadratura Gaussiana, isto é, uma fórmula que permite aproximar a integral de uma função por meio de um somatório que envolve os valores da função nos zeros desses polinômios. Simulações dessas fórmulas estão sendo desenvolvidas no Wolfram Cloud e encontram-se em fase de finalização.

Conclusões

Este trabalho possibilitou não apenas o estudo dos polinômios ortogonais de Legendre, mas também o desenvolvimento de habilidades importantes para a formação acadêmica. Destaca-se o aprendizado em temas relacionados ao cálculo numérico e na utilização de ferramentas matemáticas com grande potencial de aplicação em diferentes áreas da engenharia. Além de aprofundar em temas não explorados em disciplinas clássicas durante a graduação de Engenharia de Produção.

Além disso, a dedução de todas as propriedades foram obtidas a partir da fórmula de Rodrigues e representou um diferencial relevante, visto que a maioria das referências bibliográficas apresenta tais deduções via função geradora. Essa abordagem contribuiu para uma compreensão mais ampla do tema, reforçando a base teórica das disciplinas de Cálculo e Equações Diferenciais, que são ferramentas que podem ser utilizadas para pesquisas futuras.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal de Itajubá (PIBIC/UNIFEI) pelo apoio financeiro, essencial para a realização deste trabalho.

Expresso também minha gratidão à minha orientadora, pelo convite, apoio, orientação dedicada e paciência constante, além do incentivo que me motivou a não desistir da universidade. Sua disponibilidade para discussões, o esclarecimento de dúvidas e as valiosas sugestões foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Por fim, gostaria de agradecer também ao Programa de Inclusão Tecnológica da Diretoria de Assistência Estudantil (DAE/UNIFEI) pelo empréstimo do notebook utilizado no desenvolvimento deste trabalho.

Referências

ANDRADE, Eliana X. L.; BRACCIALI, Cleonice F.; RAFAELI, Fernando R. *Introdução aos polinômios ortogonais*. São Carlos: SBMAC, 2012. 144 p. (Notas em Matemática Aplicada, v. 64). ISBN 978-85-8215-015-3.

CAJAL, Carlos; SANTOLARIA, Jorge; SAMPER, David; VELAZQUEZ, Jesus. Efficient volumetric error compensation technique for additive manufacturing machines. *Rapid Prototyping Journal*, [S. l.], v. 22, n. 1, p. 2–19, 2016. DOI: https://doi.org/10.1108/RPJ-05-2014-0061.

EDWARDS, C. H. Jr.; PENNEY, D. E. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1998.

ESTATÍSTICA FÁCIL. *O que é: Orthogonal Polynomial (Polinômio Ortogonal)*. Disponível em: *estatisticafacil.org*. Acesso em: 21 ago. 2025.

FAPESP – Biblioteca Virtual da FAPESP. *Polinômios ortogonais e similares: propriedades e aplicações*. São Paulo, 2008. Disponível em: https://bv.fapesp.br/pt/auxilios/26856/polinomios-ortogonais-e-similares-propriedades-e-aplicacoes/. Acesso em: 21 ago. 2025.

GUTIÉRREZ, E.; NORIEGA, M.; FERNÁNDEZ, C.; PANTANO, N.; RODRIGUEZ, L.; SCAGLIA, G. Dynamic optimization of xylitol production using Legendre-based control parameterization. *Fermentation*, Basel, v. 11, n. 6, p. 308, 2025. DOI: https://doi.org/10.3390/fermentation11060308.

MASOOD, K.; ARSHAD, M.; ABUBAKAR, M.; et al. Legendre based neural networks integrated with heuristic algorithms for the analysis of Lorenz chaotic model: an intelligent and comparative study. *Scientific Reports*, [S. l.], v. 15, p. 14343, 2025. DOI: https://doi.org/10.1038/s41598-025-91911-2.