O FORMALISMO HAMILTONIANO NA DESCRIÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS INTEGRADOS

Kelly C. S. FERREIRA (IC), Alexis R. Aguirre(PQ)[1]

1 universidade federal de itajubá

Palavras-chave: Álgebra Linear. Aplicações. Física.

Introdução

A álgebra linear é um dos principais ramos da matemática, sendo responsável pelo estudo de vetores, matrizes, sistemas e transformações lineares. Mesmo sendo abstrata em sua forma, possui uma presença marcante no mundo real. Na Física, por exemplo, ela aparece quando precisamos entender movimentos, forças e campos. Segundo Dorrier, a álgebra linear começou a perder espaço no currículo do ensino superior em meados de 1980. Sendo assim, esse estudo é essencial para verificar a necessidade da melhoria de tal ensino para os alunos de física nas universidades.

Essa verificação foi feita, resolvendo alguns problemas conhecidos no universo da física, como as transformações de Lorentz, fundamental para o estudo da teoria da relatividade espacial.

Metodologia

O presente estudo foi inicialmente orientado pelo livro "Álgebra linear e suas aplicações", de David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald." Onde nos aprofundamos em assuntos como: sistemas lineares, vetores, matrizes simples, transformações cônicas, rotação de matrizes 2D e 3D. A partir dessa base, a pesquisa avançou para a aplicação dessas ferramentas em modelos físicos mais complexos. Foram investigados conceitos avançados como as equações de Sine-Gordon, o formalismo do Par de Lax, as matrizes de Pauli e as equações de Hamilton, que são centrais na descrição de diversos fenômenos na física.

Durante o estudo do Formalismo Hamiltoniano foi usado posição generalizadas (qi) e seus momentos conjugados (pi), além da Função de Hamilton e as Equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Foram realizados cálculos analíticos para demonstrar a validade das soluções teóricas, por exemplo, no caso do oscilador harmônico clássico (existe também o oscilador quântico, mas no nosso caso, somente o clássico era importante para o nosso estudo dirigido).

De uma forma geral, o oscilador harmônico clássico é um modelo físico feito para descrever sistemas que oscilam em torno de um ponto de equilíbrio, com uma força restauradora proporcional ao deslocamento.

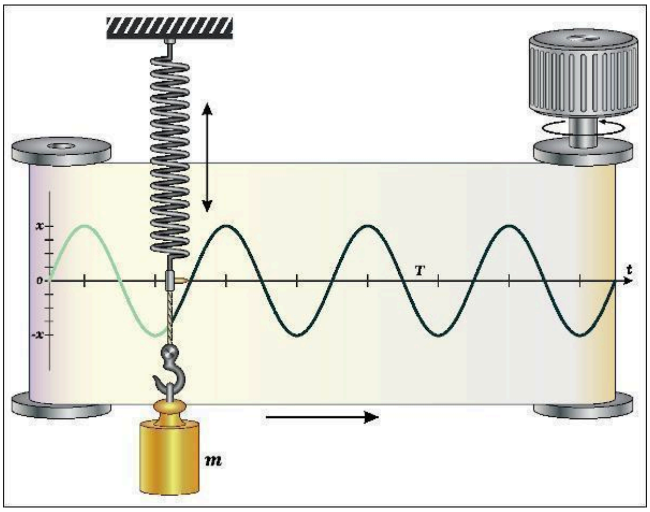

Figura 1 – Representação de um movimento harmônico simples.

O processo de cálculo serviu para verificar numericamente a consistência entre os postulados teóricos da Álgebra Linear e sua aplicação direta no estudo da Física.

Resultados e discussão

Como exemplo, iremos apresentar as aplicações da Álgebra Linear descrevendo a dinâmica do oscilador harmônico clássico, através do Formalismo Hamiltoniano. O formalismo hamiltoniano é uma reformulação da mecânica clássica que usa as equações de Hamilton para descrever a evolução de um sistema físico ao longo do tempo. Ele é particularmente útil para sistemas complexos e para fazer a transição da mecânica clássica para a mecânica quântica. No contexto deste estudo, a aplicação do formalismo hamiltoniano ao oscilador harmônico clássico demonstra como essa abordagem pode ser usada para traduzir as propriedades físicas do sistema em conceitos algébricos. As equações de Hamilton para o oscilador levam diretamente a um sistema de equações diferenciais lineares.

Para descrever a dinâmica do oscilador harmônico, aplicamos o formalismo hamiltoniano. Para isso, o vetor de estado é definido usando as variáveis canônicas: a posição x(t) e o momento conjugado p(t)=mv(t). O novo vetor de estado é dado por:

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

Para este sistema, o Hamiltoniano H é a soma das energias cinética e potencial, expressa em termos de x e p:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Usando as equações de Hamilton, as derivadas do vetor de estado são obtidas:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

Assim, a derivada do vetor de estado $\Psi'(t)$ é:

$$\Psi'(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}p(t) \\ -kx(t) \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema na forma matricial, $\Psi'(t)=A_H\Psi(t)$, a matriz A_H é dada por:

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{bmatrix}$$

O passo central foi a resolução do cálculo dos autovalores da matriz A_H, que determinam a natureza das soluções do sistema. Para encontrar os autovalores, calculamos o determinante de $(A_H - \lambda I)$:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -k & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - (\frac{1}{m})(-k) = \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Sendo assim, obtemos o seguinte resultado:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Portanto, se definirmos a frequência angular natural do sistema como:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

veremos que os autovalores são puramente imaginários:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

Ao observarmos a análise dos resultados, podemos notar que a representação do oscilador harmônico através da matriz de estado A traduz diretamente suas propriedades físicas em conceitos da Álgebra Linear. Sendo assim, ao encontrarmos os autovalores puramente imaginários, podemos dizer que são a consequência matemática direta da natureza conservativa e oscilatória do sistema, onde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

Surge naturalmente como a frequência angular.
O valor desse método vem não somente da validação de resultados conhecidos, mas sim, por transformar as equações diferenciais em um bem definido pela Álgebra Linear. Como consequência disso, temos um sistema com alta escalabilidade. Ao adicionar mais osciladores a um sistema, a diferença será a dimensão da matriz. Essencialmente, a abordagem oferece um caminho para trocar a complexidade do cálculo diferencial pela sistemática robusta da álgebra. A robustez da abordagem algébrica, já evidente na análise de autovalores, se aprofunda ao considerarmos o formalismo do Par de Lax. O formalismo consiste em encontrar duas matrizes, L e M, cuja dinâmica mútua descreve a evolução do sistema. A existência de um Par de Lax implica que o sistema é "completamente integrável", ou seja, suas equações de movimento podem ser resolvidas de forma sistemática. Para o oscilador harmônico, a construção de um Par de Lax é possível e revela suas quantidades conservadas, como a energia, demonstrando a aplicabilidade prática dessa abordagem

Conclusões

Com esse trabalho, é possível notar a falta que o estudo da álgebra pode causar em uma graduação, pois ela não é somente essencial para a formação de físicos e sim de matemáticos e engenheiros. Em alguns casos, pode estar até mesmo presente em cursos de administração. Seguindo a linha de raciocínio do estudo de Dorrier, notamos o quanto a álgebra é essencial para uma boa formação. Assim, o estudo de caso do oscilador harmônico vai além de seu exemplo específico, servindo como um argumento concreto e prático da necessidade de uma sólida e aprofundada formação em Álgebra Linear para futuros graduandos. Dominar a Álgebra Linear é, portanto, mais do que dominar uma ferramenta: é adquirir a habilidade de descrever o mundo de uma forma estruturada.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal de Itajubá pela infraestrutura e pelo ambiente acadêmico que possibilitaram o desenvolvimento deste estudo. Agradeço igualmente ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da bolsa de Iniciação Científica, fundamental para a viabilização desta pesquisa

Referências

DORIER, Jean-Luc (Ed.). On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
LAY, David C.; LAY, Steven R.; MCDONALD, Judi J. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles P.; SAFKO, John L. **Classical Mechanics**. 3. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.

RETORE, Ana Lúcia. **Introduction to classical and quantum integrability**. J. Phys. A: Math. Theor. 55 (2022) 173001.