

SISTEMA DE DOIS CAMPOS ESCALARES ACOPLADOS: O PAPEL DE FONTES EXTERNAS

Leonardo S. Bustamante (IC)¹, Fabricio A. B. Rangel (PQ)¹

¹Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)

Palavras-chave: Energia de interação. Fontes pontuais. Potencial de yukawa. Teoria de campos.

Introdução

O campo de Klein-Gordon, apesar de sua simplicidade, tem uma ampla gama de aplicações, que vão desde a modelagem efetiva de interações nucleares até a descrição de sistemas de matéria condensada. Podemos encontrar diversos modelos envolvendo esse tipo de campo, mesmo no contexto da teoria clássica de campos (DAS, 2008). Ao considerarmos a presença de fontes externas específicas acopladas linearmente com o campo de Klein-Gordon, encontramos o potencial de Yukawa para a interação entre tais fontes (BARONE; FLORES-HIDALGO, 2008).

Neste trabalho analisamos a interação entre fontes externas acopladas com um sistema composto por dois campos escalares, estando estes acoplados entre si. Resolvemos seguir um caminho diferente do que se faz usualmente na literatura, quando se emprega uma redefinição dos campos em questão. O objetivo foi o de desenvolver um formalismo que nos permitisse tratar, futuramente, sistemas mais elaborados, onde um dos campos estivesse definido em uma superfície bidimensional ou ao longo de uma reta, e o outro, definido em todo o espaço. Esse tipo de sistema permitiria modelar a propagação de fônons em sistemas de matéria condensada com defeitos ao longo da rede cristalina, algo que não seria possível com o formalismo de redefinição de campos.

O modelo que abordamos é composto por dois campos de Klein-Gordon de massas diferentes, m_1 e m_2 , acoplados por um termo de mistura modulado por um parâmetro $\frac{1}{2}\mu^2$. O ponto central do estudo é o de desenvolver um método matricial para tratar o problema e verificar como se dá a interação entre fontes externas para ambos os campos.

Metodologia

Primeiramente, é necessário estabelecer as definições e convenções adotadas ao longo deste trabalho. Consideramos um espaço-tempo com assinatura métrica $(+, -, -, -)$ e unidades naturais, com $c = \hbar = 1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e \hbar é a constante de Planck reduzida. Ademais, índices gregos $(\mu, \nu \dots = 0, 1, 2, 3)$ são utilizados para representar as componentes no espaço-tempo.

Para iniciar o estudo do caso citado, definimos primeiro a Lagrangiana do sistema:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i) (\partial^\mu \phi_i) - \frac{1}{2} m_i^2 \phi_i^2 + j_i(x) \phi_i \right] - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_1 \phi_2 \quad (1)$$

As equações de movimento para o sistema são obtidas a partir da densidade Lagrangiana (1) através das equações de Euler-Lagrange para campos (NĂSTASE, 2019, p. 4). A aplicação deste formalismo resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} (\square + m_1^2) \phi_1 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi_2 = j_1(x) \\ (\square + m_2^2) \phi_2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi_1 = j_2(x) \end{cases} \quad (2)$$

Este sistema pode ser representado de forma mais compacta e clara pela notação matricial:

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1^2 & \frac{\mu^2}{2} \\ \frac{\mu^2}{2} & m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Essa expressão, por sua vez, pode ser escrita simbolicamente como:

$$(\square \mathbf{I}_2 + \mathbf{M}) \Phi = \mathbf{J}(x), \quad (4)$$

na qual I_2 é a matriz identidade, M é a matriz de massa, Φ é o vetor de campos,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

e J representa o vetor de fontes, que neste trabalho é adotado como composto por duas fontes puntiformes, uma para cada campo, como segue:

$$J(x) = \begin{pmatrix} Q_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \\ Q_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Para analisar a interação entre as fontes externas, temos que obter a contribuição destas para a energia do sistema. O primeiro passo para determinar essa energia é obter a solução para os campos, Φ . Para tal, impomos a condição de contorno de que os campos se anulem no infinito, o que elimina a solução homogênea. A solução de interesse é, portanto, a solução particular, obtida pelo método da função de Green (DAS, 2008):

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y) J(y) d^4 y. \quad (7)$$

A função de Green é uma matriz nesse caso, e satisfaz:

$$(\square I_2 + M)G(x-y) = I_2 \delta^4(x-y). \quad (8)$$

Utilizando a transformada de Fourier, podemos reescrever a função de Green como

$$G(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{-ik(x-y)}. \quad (9)$$

Desta forma, podemos aplicar a transformada na equação (8) e encontrar $\tilde{G}(k)$,

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{(k_\mu k^\mu - a_+^2)(k_\mu k^\mu - a_-^2)} \times \begin{pmatrix} m_2^2 - k_\mu k^\mu & -\frac{\mu^2}{2} \\ -\frac{\mu^2}{2} & m_1^2 - k_\mu k^\mu \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Definindo

$$a_\pm^2 = \frac{1}{2} \left[-m_1^2 - m_2^2 \pm \sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + \mu^4} \right], \quad (11)$$

e usando $\tilde{G}(k)$ dado em (10), temos a solução particular em termos de uma transformada de Fourier:

$$\Phi(x) = \int \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) J(y) e^{-ik(x-y)} d^4 k d^4 y. \quad (12)$$

Pelas propriedades da delta de Dirac e pelo produto matricial de $J(y)$, temos:

$$\Phi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{Q_1 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1)}}{(|\vec{k}|^2 - a_+^2)(|\vec{k}|^2 - a_-^2)} \begin{pmatrix} m_2^2 - |\vec{k}|^2 \\ -\mu^2/2 \end{pmatrix} + \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{Q_2 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2)}}{(|\vec{k}|^2 - a_+^2)(|\vec{k}|^2 - a_-^2)} \begin{pmatrix} -\mu^2/2 \\ m_1^2 - |\vec{k}|^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Com a solução explícita para os campos Φ determinada, o próximo passo é calcular a energia de interação do sistema. Essa energia é obtida com a Hamiltoniana do sistema na configuração de campo dada pela solução das equações dinâmicas. A definição padrão para um único campo (NASTASE, 2019, p. 85) pode ser generalizada para o nosso sistema de dois campos da seguinte forma:

$$H = \int d^3 \vec{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} \dot{\phi}_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_2} \dot{\phi}_2 - \mathcal{L} \right]. \quad (14)$$

Ao substituírmos os termos da Lagrangiana (1) na definição da Hamiltoniana, podemos encontrar a expressão para a energia do nosso sistema.

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \left[(\partial_0 \Phi)^T (\partial_0 \Phi) + (\vec{\nabla} \Phi)^T \cdot (\vec{\nabla} \Phi) + \Phi^T M \Phi - 2J^T \Phi \right]. \quad (15)$$

O passo seguinte consiste em reescrever o termo de energia dado pelo gradiente. Através de manipulações algébricas que envolvem a primeira identidade de Green, a Hamiltoniana assume a forma:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \left[(\partial_0 \Phi)^T (\partial_0 \Phi) - \Phi^T (\vec{\nabla}^2 \Phi) + \Phi^T M \Phi - 2J^T \Phi \right]. \quad (16)$$

A seguir, uma manipulação algébrica chave é realizada para isolar a dependência da fonte J . Ao somar e subtrair o termo $\frac{1}{2} \Phi^T (\partial_0^2 \Phi)$ na integral e utilizar a equação (4) para agrupar os termos, a expressão para a Hamiltoniana pode ser reescrita de forma mais compacta

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \left[(\partial_0 \Phi)^T (\partial_0 \Phi) - \Phi^T (\partial_0^2 \Phi) - \Phi^T J \right]. \quad (17)$$

Pela equação (13), vemos que Φ não depende do tempo. Portanto, a equação (17) se resume à:

$$H = -\frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \left[\Phi^T J \right]. \quad (18)$$

Ao realizar o produto matricial $\Phi^T J$, substituindo a solução para os campos (13), utilizando as propriedades da delta de Dirac para resolver a integral espacial e descartando os termos de auto-energia de cada fonte J_i ,

temos que a energia de interação entre as fontes puntiformes é dada pela seguinte integral no espaço de momento:

$$H = \int \frac{d^3\vec{k}}{32\pi^3} \frac{\mu^2 Q_1 Q_2}{(|\vec{k}|^2 - a_+^2)(|\vec{k}|^2 - a_-^2)}, \quad (19)$$

$$\times \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]$$

onde $\vec{r} = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ é o vetor de posição relativa entre as fontes.

Para resolver esta integral, passamos para coordenadas esféricas. Por conveniência, alinhamos o eixo z, no espaço de momento, com o vetor \vec{r} , de modo que o produto escalar se torna $\vec{k} \cdot \vec{r} = krcos\theta$ e o elemento de volume é $d^3\vec{k} = k^2 sin\theta dk d\theta d\phi$. A integral então se torna:

$$H = \int \frac{dk d\theta d\phi}{32\pi^3} \frac{\mu^2 Q_1 Q_2}{(k^2 - a_+^2)(k^2 - a_-^2)} \quad (20)$$

$$\times \left[e^{ikrcos\theta} + e^{-ikrcos\theta} \right] k^2 sin\theta.$$

Em relação ao ângulo azimutal, ϕ a integração é direta e resulta em um fator 2π . Para o ângulo polar, θ , a integral pode ser resolvida utilizando a substituição $u = cos\theta$, o que resulta em:

$$H = \frac{\mu^2 Q_1 Q_2}{2(2\pi)^2 ir} \int_0^\infty dk \frac{k (e^{ikr} - e^{-ikr})}{(k^2 - a_+^2)(k^2 - a_-^2)}. \quad (21)$$

Para resolver a integral em k , utilizaremos o método de integração no plano complexo. Primeiramente, notamos que o integrando é uma função par de k . Aproveitando essa simetria, podemos estender a integral para todo o eixo real, um passo necessário para a aplicação do teorema dos resíduos (ARFKEN; WEBER, 2005),

$$H = \frac{\mu^2 Q_1 Q_2}{4(2\pi)^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k (e^{ikr} - e^{-ikr})}{(k^2 - a_+^2)(k^2 - a_-^2)}. \quad (22)$$

A aplicação do teorema dos resíduos para resolver a integral depende da natureza dos pólos, que são determinados pelos valores de a_+ e a_- . Analisando a definição de a_\pm^2 , nota-se que ambos podem ser negativos (resultando em a_\pm imaginários puros) sob a condição de que $\mu^2 < 2m_1 m_2$. Este regime corresponde ao caso de um sistema estável com duas massas físicas reais.

Neste trabalho, focaremos exclusivamente neste regime estável, onde os pólos do integrando são bem definidos.

Resultados e discussão

Após a realização da integral no plano complexo, sob o regime estável ($\mu^2 < 2m_1 m_2$) a energia de interação H entre as duas fontes puntiformes, separadas por uma distância $r = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, pode ser obtida

$$H = \frac{\mu^2 Q_1 Q_2}{8\pi r} \frac{(e^{-\gamma_+ r} - e^{-\gamma_- r})}{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + \mu^4}}. \quad (23)$$

Nesta expressão, as constantes γ_\pm são as massas dos campos físicos resultantes do acoplamento, definidas como:

$$\gamma_\pm = \sqrt{\frac{1}{2} \left[m_1^2 + m_2^2 \mp \sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + \mu^4} \right]}. \quad (24)$$

Ademais, a energia é proporcional às cargas Q_1 e Q_2 , descrevendo uma interação atrativa ($H < 0$) ou repulsiva ($H > 0$), o que dependerá da combinação dos sinais das cargas e dos demais termos da expressão.

As massas físicas do sistema dependem diretamente da intensidade do acoplamento μ . No limite de acoplamento nulo ($\mu \rightarrow 0$), as massas físicas γ_+ e γ_- se reduzem às massas originais m_1 e m_2 e a interação se anula completamente. À medida que o acoplamento aumenta, a diferença entre as massas físicas aumenta e a energia de interação torna-se não nula. Isso significa que o acoplamento não só gera a interação, mas também modifica propriedades fundamentais (as massas) de propagação do sistema.

Para contextualizar o resultado obtido, é útil compará-lo com o potencial de Yukawa padrão, que descreve a interação mediada por um único campo massivo (DAS, 2008, p. 325). Este potencial tem a forma:

$$V \propto -\frac{e^{-\gamma r}}{r}. \quad (25)$$

A característica fundamental deste potencial é seu decaimento exponencial, representando uma força de curto alcance. Porém, a nossa solução para a energia (23) apresenta uma estrutura significativamente diferente, pois ela corresponde à superposição de dois potenciais de Yukawa com sinais opostos e alcances distintos.

A existência dessa superposição gera uma alteração na dependência da energia de interação H com a distância r . Para visualizar, plotamos a energia (23) em função de r na Figura 1. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 1.0$, $m_2 = 1.5$, $\mu = 1.5$ e $Q_1 Q_2 = 1.0$, em unidades naturais.

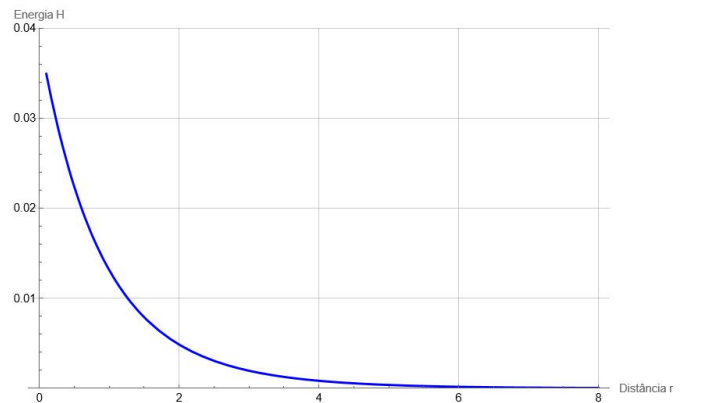


Figura 1: Energia de Interação em Função da Distância

De forma análoga ao potencial de Yukawa, a energia de interação tende a zero para grandes valores de r . Porém, para pequenas distâncias, reside a diferença fundamental. Enquanto o potencial de Yukawa diverge na origem, a energia H neste modelo converge para um valor finito. Essa regularidade em $r = 0$ é uma consequência direta do acoplamento entre os campos.

Conclusões

Neste trabalho, investigamos a energia de interação entre duas fontes estáticas mediada por um sistema de dois campos escalares acoplados entre si. Utilizando o formalismo da teoria clássica de campos, a Lagrangiana do sistema foi empregada para derivar as equações de movimento e, através do método da função de Green, obtivemos suas soluções. O cálculo da Hamiltoniana para esta configuração estática permitiu encontrar a energia de interação do sistema.

Em vez de um potencial de Yukawa simples, a energia é descrita pela combinação de dois potenciais de Yukawa com alcances distintos. Foi verificado que estes alcances são determinados por massas físicas que dependem diretamente da intensidade do acoplamento. Outra consequência notável do acoplamento é a regularidade do potencial quando as fontes se superpõem, que converge para um valor finito.

Nesta análise, se restringiu ao regime estável do sistema. Uma continuação natural do trabalho seria a análise do regime de acoplamento forte $\mu^2 > 2m_1m_2$. Neste caso, uma das massas físicas torna-se imaginária, alterando drasticamente o comportamento do sistema.

O formalismo matricial empregado pode ser ampliado para o estudo de sistemas mais complexos, onde um dos campos poderia estar restrito a uma região limitada do espaço.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq, em particular, pelo auxílio financeiro fornecido por meio do programa PIBIC e a UNIFEI por toda infraestrutura fornecida.

Referências

ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J. *Mathematical Methods for Physicists*, 6. ed. San Diego: Academic Press, 2005. 900 p. ISBN 978-85-352-2050-6.

BARONE, F. A.; FLORES-HIDALGO, G. Vacuum energies due to deltalike currents: Simulating classical objects along branes with arbitrary codimensions. **Physical Review D**, v. 78, n. 12, art. 125003, 5 dez. 2008. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.125003.

DAS, Ashok. *Lectures on Quantum Field Theory*. New Jersey: World Scientific, 2008. 775 p. ISBN 978-981-283-285-6.

NĂSTASE, Horațiu. *Classical field theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. ISBN 978-1-108-47701-7.