DETERMINAÇÃO DO PARÂMETRO DE DESACELERAÇÃO DO UNIVERSO EM MODELOS COSMOLÓGICOS INOMOGÊNEOS

Pedro H. G. Lopes[1] (IC), Leandro G. Gomes (PQ)[1]

[1]*Universidade Federal de Itajubá*

Palavras-chave: Cosmologia inomogênea. Redshift cosmológico. Parâmetro de desaceleração efetivo.

Introdução

Modelos cosmológicos inomogêneos são essenciais para compreender as variações locais da curvatura do espaço-tempo causadas por estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias. Por conta disso, um número grande de geometrias inomogeneas vem sendo construídas e estudadas nos últimos anos a fim de obter uma descrição mais realista de universo, com o objetivo de explicar a imensa carga atual de dados observacionais (STEPHANI et al., 2003), (KRASINSKI, 1997). Neste contexto, este trabalho se propoe a derivar a relação entre o parâmetro de redshift (z) e a distância luminosa (D_L) com base em um modelo de universo inomogêno, representado pela métrica de Stephani-Barnes (STEPHANI et al., 2003). E, atraveś desta relação, encontrar uma equação para o parâmetro de desaceleração cosmológico neste contexto. Este trabalho se baseou fortemente na referência (BITTENCOURT; GOMES; SANTOS, 2021), porém com o objetivo de generalizar a geometria utilizada pelos autores, passando do caso mais restrito, cuja sub-variedade puramente espacial do espaço-tempo é euclideana, para uma sub-variedade que pode ser euclideana, esférica ou hiperbólica. O formalismo base utilizado é conhecido como formalismo comóvel, onde se definem observadores fundamentais respondáveis por medir as quantidades físicas.

Metodologia

Por ser um trabalho teórico em ótica relativística, é fundamental definir, primeiramente, a métrica do espaço-tempo em questão, que, nesta pesquisa, se trata de modelos de universo inomogêneo, representada pela forma mais geral da métrica do tipo Stephani-Barnes (STEPHANI et al., 2003)

$$ds^2 = -e^{f(t,x,y,z)}dt^2 + \frac{a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2)}{[1+\frac{K}{4}(x^2+y^2+z^2)]^2}, \quad (1)$$

onde $f(t,x,y,z)$ é uma função arbitrária de classe C^2, pelo menos.

Definida a métrica a ser usada, as equações geodésicas devem ser calculadas. Em particular, foi utilizada neste trabalho a seguinte notação para essas equações

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0, \quad (2)$$

onde λ é um parâmetro afim e $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ é o vetor de propagação, definido como o gradiente da fase, isto é, um vetor que é sempre ortogonal à frente de onda.

A forma com que estas equações serão analisadas e os resultados serão obtidos será baseada no formalismo comóvel, do qual está muito bem construído do livro "Relativistic Cosmologic" (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012). Este formalismo tem como ideia base que antes de qualquer análise física em um espaço-tempo geral, deve-se definir os observadores fundamentais que serão responsáveis por fazer medidas, sendo assim, todos os valores obtidos de quantidades físicas serão em relação a estes observadores fundamentais. Matematicamente, estes observadores são representados por um campo vetorial unitário tipo-tempo, definido como $u^\mu = e^{-f/2}\delta^\mu_0$.

É importante garantir a existência destes observadores cosmológicos. Uma maneira de se fazer isso é supor que a densidade de energia (ρ) é uma função separável em uma dependência temporal e outra espacial (BITTENCOURT; GOMES; SANTOS, 2021). Sendo assim, considera-se a seguinte formulação

$$\rho(t,x,y,z) = \frac{\epsilon(t)}{[\chi(x,y,z)]^2}, \quad (3)$$

onde o fato da função χ não acompanhar necessariamente a evolução temporal e modificar a densidade de energia do universo, representa a consequência da inomogeneidade da geometria neste modelo cosmológico.

Definidos o vetor de propagação e os observadores fundamentais, é importante expressar a relação entre estes e o parâmetro de redshift z

$$1+z = \frac{(-u_\mu k^\mu)\big|_e}{(-u_\mu k^\mu)\big|_o}, \quad (4)$$

onde o subescrito e e o indicam os momentos de emissão e observação do fóton.

Para relacionar o parâmetro de redshift z com a distância luminosa D_L e distância angular D_A, foram utilizadas as equações de Sachs (BENTIVEGNA et al., 2018)

$$\frac{d^2 D_A}{d\lambda^2}+\left(\Sigma^2+\frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\right)D_A=0, \tag{5}$$

$$\frac{d\Sigma}{d\lambda}+2\left(\frac{d\ln D_A}{d\lambda}\right)\Sigma=C_{\alpha\beta\mu\nu}m^\alpha k^\beta m^\mu k^\nu, \tag{6}$$

onde Σ é o cisalhamento, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de Weyl e m^μ são componente da base do screen-space, do qual se trata de um sub-espaço vetorial puramente espacial de dimensão 2 que funciona como pano de fundo onde alterações sofridas pelo feixe de luz são medidas e interpretadas (BENTIVEGNA et al., 2018).

Por fim, foi utilizada a conhecida relação de Etherington (ETHERINGTON, 1933), que relaciona z, D_L e D_A

$$D_L=(1+z)^2 D_A. \tag{7}$$

Como complemento final, a fim de facilitar a correlação entre modelos mais gerais de espaços-tempos cosmológicos, como os de Stephani-Barnes, com o modelo padrão da Cosmologia, onde não há inomogeneidades, será utilizada para fins de comparação de parâmetros a relação da expansão da distância luminosa com redshift do modelo padrão, que pode ser consultada no livro "Cosmology" (WEINBERG, 2008)

$$D_L(z)=\frac{1}{H_0}\left[z+\frac{1}{2}(1-q_0)z^2+\ldots\right], \tag{8}$$

onde q_0 é o parâmetro de desaceleração definido para FLRW. Neste trabalho, encontraremos uma expressão para um parâmetro de desaceleração mais geral, denominado como q_{eff}.

Por fim, foram assumidas as unidades geométricas, i.e., $c=8\pi G=1$, onde c é a velocidade da luz e G é a constante de Newton.

Resultados e discussão

Seguindo com o procedimento descrito na metodologia, as equações geodésicas obtidas foram

$$\frac{dk^0}{d\lambda}+2\left(\frac{\chi'}{\chi}\right)k^0+H(k^0)^2=0, \tag{9}$$

$$\frac{dk^k}{d\lambda}+\left(\frac{s_\kappa^2}{a^2}\right)\chi\partial_k\chi(k^0)^2+2Hk^0k^k-\left(\frac{\kappa}{s_\kappa}\right)(k^i x_i)k^k +\left(\kappa s_\kappa\frac{\chi^2}{2a^2}\right)(k^0)^2x^k=0, \tag{10}$$

onde $k^i\partial_i\chi=k\nabla\chi\equiv\chi'$ e $s_\kappa=1+\frac{\kappa}{4}(x^2+y^2+z^2)$.

É possível resolver a equação (9) e encontrar a seguinte relação

$$k^0=\frac{E}{a\chi^2}, \tag{11}$$

onde E é uma constante de integração, que pode assumir o valor de $E=a_o\chi_o$ através da liberdade de escolha do parâmetro afim λ, já que existem infinitos deles.

Ao abrir a equação (4), encontramos o seguinte

$$1+z(\lambda)=\frac{a_0}{a(\lambda)}\frac{\chi_0}{\chi(\lambda)}. \tag{12}$$

Com todo esse aparato, chegou o momento de resolver as equações de Sachs, expressadas em (5) e (6). Para tal, algumas condições iniciais precisam ser postas, condições estas que possuem derivação cosmológica direta ou significado físico importante. São elas:

$$\Sigma(\lambda=0)=0, \tag{13}$$

$$D_A(\lambda=0)=0 \tag{14}$$

e

$$\left.\frac{dD_A}{dz}\right|_0=\frac{1}{H_0}. \tag{15}$$

A condição (13) possui um significado físico muito forte, como o cisalhamento pode ser pensado como distorções no feixe de luz, essa condição está definindo a imagem vista no momento da observação como distorção nula, i.e., qualquer modificação deste padrão implicará num cisalhamento não nulo. Matematicamente, esta condição irá evitar uma divergência ao valorar as equações de Sachs em $\lambda=0$. A condição (14) está estabelecendo que a origem da parametrização coincide com a posição e momento do observador. Por fim, a condição (15) é uma implicação direta da Lei de Hubble (HUBBLE, 1929).

Com este conjunto de condições, as equações de Sachs desacoplam e é possível chegar na seguinte relação

$$\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2\frac{d^2D_A}{dz^2}=\frac{-d^2z}{d\lambda^2}\frac{1}{H_0}. \tag{16}$$

Essa relação relaciona derivadas segundas da distância angular e do parâmetro de redshift, o que sugere que

uma expansão em séries de Taylor seja feita. O fato da expansão ir até o grau dois não prejudica demasiadamente as informações cosmológicas, já que pequenos valores de z já implicam em distâncias cosmológicas.
Sabendo disso, conforme feito em (VILLANI, 2014), temos as seguintes expansões

$$a(\lambda)=a_0[1+a_1 H_0\lambda+\frac{1}{2}a_2 H_0^2\lambda^2]+O(\lambda^3) \tag{17}$$

e

$$\chi(\lambda)=\chi_0[1+\chi_1 H_0\lambda+\frac{1}{2}\chi_2 H_0^2\lambda^2]+O(\lambda^3), \tag{18}$$

onde os parâmetros a_1, a_2, χ_1 e χ_2 são obtidos ao comparar as expansões em série de Taylor da forma comum, encontrando os seguintes resultados

$$a_1=\frac{1}{\chi_0}, \tag{19}$$

$$\chi_1=\frac{1}{\chi_0}\frac{1}{H_0}\chi'|_{\lambda=0}, \tag{20}$$

$$a_2=\frac{-1-q_0-2\chi_0\chi_1}{\chi_0^2} \tag{21}$$

e

$$\chi_2=\frac{1}{H_0^2\chi_0}\left.\frac{d^2\chi}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0}, \tag{22}$$

onde o termo $\left.\frac{d^2\chi}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0}$ é não trivial e carrega a relação entre a inomogeneidade do universo e sua geometria espacial, que, através da métrica, pode-se inferir que existem três possibilidades para a sub-variedade puramente espacial do espaço-tempo que descreve o universo: euclidiana para $\kappa=0$, esférica para $\kappa=1$ e hiperbólica para $\kappa=-1$. A expressão completa deste termo é

$$\left.\frac{d^2\chi}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0}=\frac{-1}{a_0^2\chi_0}s_\kappa^2\left(\left.\frac{d\chi}{x^i}\right|_{\lambda=0}\right)^2-2\frac{H_0}{\chi_0}\chi'|_{\lambda=0}$$
$$\frac{\kappa}{s_\kappa}(k^i x_j)\chi'|_{\lambda=0}-\frac{\kappa}{2a_0^2}s_\kappa\left.\left(x^i\frac{d\chi}{dx^i}\right)\right|_{\lambda=0}+(k^i k^j)|_{\lambda=0}$$
$$\left.\frac{d^2\chi}{dx^j dx^i}\right|_{\lambda=0}. \tag{23}$$

Com estes parâmetros bem definidos, foram tomadas as derivadas primeira e segunda do parâmetro de redshift com respeito à λ através da equação (12), obtendo

$$\left.\frac{dz}{d\chi}\right|_{z=0}=-H_0(a_1+\chi_1) \tag{24}$$

e

$$\left.\frac{d^2 z}{d\lambda^2}\right|_{z=0}=H_0^2[2({a_1}^2+a_1\chi_1+{\chi_1}^2)-a_2-\chi_2]. \tag{25}$$

Para que a relação entre o parâmetro de redshift e a distância luminosa seja concluída, toma-se a expansão até a segunda ordem de D_L e D_A, obtendo

$$D_x=\frac{D_x^{(1)}}{H_0}z+\frac{D_x^{(2)}}{2H_0}z^2+O(z^3), \tag{26}$$

onde, $X=A, L$ e os coeficientes são

$${D_A}^{(1)}={D_L}^{(1)}=1 \text{ e } {D_L}^{(2)}=4+{D_A}^{(2)}. \tag{27}$$

Comparando a expansão de D_L, equação (26), com a forma padrão, equação (8), pode-se inferir que

$${D_L}^{(2)}=4+{D_A}^{(2)}\equiv 1-q_{eff}, \tag{28}$$

então, usando as equações (16), (24) e (25), obtemos

$$D_A^{(2)}=-\frac{2(a_1^2+a_1\chi_1+{\chi_1}^2)-a_2-\chi_2}{(a_1+\chi_1)^2}, \tag{29}$$

e, finalmente, com (28)

$$q_{eff}=\frac{q_0-2\chi_0\chi_1-\chi_0^2\chi_1^2-\chi_0^2\chi_2}{(1+\chi_1\chi_0)^2}. \tag{30}$$

Conclusões

Neste trabalho a relação entre o parâmetro de redshift e a distância luminosa foi obtida com base em um modelo de universo mais geral, admitindo inomogeneidades, caracterizado pela métrica do tipo Stephani-Barnes. Pode-se notar ao comparar com a mesma relação derivada dos modelos de FLRW que a relação entre z e D_L se torna consideravelmente mais complexa devido à presença de inomogeneidades. Foi resolvida as equações de Sachs para valores de redshifts pequenos, o que não se trata de uma restrição importante devido ao fato de que mesmo para pequenos valores de z as distâncias já são consideradas cosmológicas.
O resultado principal, expresso na Equação (30), revela que o parâmetro de desaceleração medido não é apenas o valor de fundo (q_0), mas é modificado por termos (χ_1, χ_2) que dependem diretamente da função que caracteriza a inomogeneidade e de sua evolução ao longo da linha de mundo do observador. Fisicamente, isso significa que a aceleração ou desaceleração

aparente do universo é influenciada pelas estruturas locais, como aglomerados e vazios, alterando a expansão cosmológica percebida.

Agradecimentos

Este trabalho foi possível graças ao apoio da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) e pelo financiamento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), meus sinceros agradecimentos.

Referências

STEPHANI, H. et al. **Exact solutions to Einstein's field equations**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

KRASINSKI, A. **Inhomogeneous Cosmological Models**. New York: Cambridge University Press, 1997.

BITTENCOURT, E.; GOMES, L.; SANTOS, G. **Intrinsically symmetric cosmological model in the presence of dissipative fluids**. International Journal of Modern Physics D, v. 30, n. 05, p. 2150033, 2021.

BENTIVEGNA, E. et al. **Black-hole lattices as cosmological models**. Classical and Quantum Gravity, Bristol, v. 35, n. 17, 175004, 2018.

ETHERINGTON, I. M. H. **On the definition of distance in general relativity**. Philosophical Magazine, London, ser. 7, v. 15, p. 761-766, 1933.

WEINBERG, Steven. **Cosmology**. Oxford: Oxford University Press, 2008.

HUBBLE, Edwin. **A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae**. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Washington, D.C., v. 15, n. 3, p. 168-173, 1929.

VILLANI, Mattia. **Taylor expansion of luminosity distance in Szekeres cosmological models: effects of local structures evolution on cosmographic parameters**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, [s. l.], n. 06, p. 015, jun. 2014.