

“Do conhecimento acadêmico à transformação sustentável: inovação com validação científica”

INTERPOLAÇÃO NO INTERIOR DE SINGULARIDADES PARA MODELOS ANÁLOGOS

Renato Klippert¹ (IC), Lucas Ruiz dos Santos (PQ)¹
¹*Universidade Federal de Itajubá.*

Palavras-chave: Buraco de minhoca. Buraco negro. Gravitação análoga.

Introdução

A analogia óptica entre sistemas gravitacionais e meios dielétricos é, usualmente, utilizada para testar aspectos gravitacionais em amostra manipulável em laboratório. Aqui, ela serve para induzir modelos gravitacionais que estendem o domínio de validade das clássicas soluções de buraco negro e de buraco de minhoca. Os modelos resultantes são convenientemente interpolados de modo contínuo. Uma propriedade cinemática apropriada desempenha o papel de identificar similaridades entre os modelos da família interpolada, permitindo estabelecer uma noção quantitativa para essa similaridade. O caráter original desse estudo justifica-o academicamente, com a perspectiva de publicação do trabalho em um periódico internacional especializado.

Metodologia

Após identificar expressões integrais matematicamente consistentes para as grandezas elétricas de modelos análogos ópticos a soluções gravitacionais com simetria esférica (BITTENCOURT 2021) de buraco negro (ADLER 1965) e buraco de minhoca (ELLIS 1973), procede-se a natural extensão do domínio de validade de tais meios materiais. A regularidade do vetor deslocamento elétrico, aliada à preservação do sinal da permissividade elétrica, servem como guia na elaboração do esquema de interpolação utilizado. Obtém-se a forma explícita para o elemento de linha que descreve a família interpolada resultante, e a forma do tensor de Einstein associado. A existência de uma bacia de atração para raios de luz que são produzidos na região exterior e dirigidos para fora permite identificar, na família interpolada, os modelos que guardam maior similaridade com a solução de buraco negro — e um específico modelo separatriz entre essas duas classes de soluções.

Resultados e discussão

O valor crítico obtido para o parâmetro de interpolação é dado aproximadamente por $\beta = 0.17539$ (onde $\beta = 0$ corresponde ao buraco negro e $\beta = 1$ ao buraco de minhoca, preenchidos conforme a extensão dos domínios mencionada acima). Os modelos com parâmetro de interpolação entre zero e esse valor crítico apresentam comportamento similar a um buraco negro. Por outro lado, modelos cujo parâmetro de interpolação é maior que o valor crítico, mas não superior à unidade, possuem comportamento similar a um buraco de minhoca. De forma explícita, o elemento de linha da família de métricas interpolada é dado pela expressão

$$ds^2 = \frac{dt^2}{\mu\epsilon(1+\xi)} - \frac{dr^2}{1+\xi} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

onde $\epsilon(r, \beta)$ e $\xi(r, \beta)$ são funções da coordenada radial r e o parâmetro de interpolação β . Redefinindo o parâmetro radial pelo raio do horizonte de eventos, $u := r/R$, essas funções ficam definidas por

$$\xi(u, \beta) = \left| 1 - \frac{b(u)}{u} \right| - 1, \quad (2)$$

e

$$\epsilon(u, \beta) = \epsilon_o \exp(-2\Phi) \left[1 - \frac{b(u)}{u} \right]^{-1}, \quad (3)$$

onde

$$b(u) = \begin{cases} \beta(u^2 - 1) + 1, & \text{se } 0 < u < 1 \\ \beta\left(\frac{1}{u} - 1\right) + 1, & \text{se } u > 1 \end{cases} \quad (4)$$

é a interpolação das correspondentes funções para o modelo de buraco negro e buraco de minhoca, preenchido. Além disso, a função Φ é interpolada da seguinte maneira

$$e^{2\Phi(u)} = \begin{cases} \frac{\beta u^2 + (1-\beta)(1-u)}{u(\beta u - 1 + \beta)}, & \text{se } 0 < u < 1 \\ \frac{u - (1-2\beta)}{u + \beta}, & \text{se } u > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Com essas escolhas, o tensor de Einstein tem o formato diagonal $G_\mu^\nu = \text{diag}(G_t^t, G_u^u, G_\theta^\theta, G_\phi^\phi)$, cujas componentes são dadas, no exterior do horizonte, por

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{\beta}{u^4}, \\ G_u^u &= \frac{\beta(-2\beta + (2\beta - 3)u + 1)}{u^4(2\beta + u - 1)}, \\ G_\theta^\theta = G_\phi^\phi &= \beta \left(2(1 - 2\beta)^2\beta + (-9\beta^2 + 23\beta - 8)u^2 \right. \\ &\quad \left. + (6 - 4\beta)u^3 + (-4\beta^3 + 24\beta^2 - 17\beta + 3)u \right) \\ &\quad / (2u^4(\beta + u)(2\beta + u - 1)^2), \end{aligned}$$

e no interior do horizonte, por

$$\begin{aligned} G_t^t &= -\frac{2\beta}{u}, \\ G_u^u &= \frac{\beta(u^2 - \beta(u^3 + u^2 - 2) - 2)}{u^2(\beta(u^2 + u - 1) - u + 1)}, \\ G_\theta^\theta = G_\phi^\phi &= \beta \left(2(\beta - 1)^3 - 2\beta^3 u^6 - 6(\beta - 1)\beta^2 u^5 \right. \\ &\quad \left. + 2(\beta - 1)\beta(\beta + 3)u^4 + (\beta - 1)(3(\beta - 3)\beta - 2)u^3 \right. \\ &\quad \left. - (\beta - 1)^2(11\beta + 5)u^2 - 2(\beta - 3)(\beta - 1)^2 u \right) \\ &\quad / (4u^2(\beta + \beta u - 1)(\beta + \beta(-u + 1))u + u - 1)^2). \end{aligned}$$

Conclusões

A analogia óptica entre campos gravitacionais no vácuo e meios dielétricos não lineares pode ser usada para induzir modelos gravitacionais a partir de configurações eletromagnéticas convenientes. Com essa ferramenta, uma proposta de região interior para uma classe de soluções tipo buraco de minhoca aparece naturalmente. A geometria resultante foi interpolada a de uma similar extensão da solução de buraco negro neutro esférico, de modo a fornecer uma noção quantitativa da "distância" entre essas duas geometrias. A existência de uma bacia de atração, capaz de capturar raios de luz produzidos na região exterior ao horizonte e dirigidos radialmente para fora, permite identificar uma específica geometria como separatriz entre a classe similar ao buraco negro e a classe similar ao buraco de minhoca.

Agradecimentos

Uma versão preliminar deste trabalho foi objeto de estudo na dissertação de mestrado de Diego Renan da Silva (PGF/UNIFEI/2020), a quem os autores expressam sua gratidão. Os autores agradecem à Universidade Federal de Itajubá pelo ambiente e recursos adequados à elaboração da pesquisa aqui reportada.

Referências

ADLER, R. et al, "Introduction to general relativity", McGraw-Hill, Nova York, 1965.

BITTENCOURT, E. et al, "Spherical symmetry and nonmagnetic dielectrics in analog models of gravity", Physical Review A, volume 104, artigo 043523, 2021.

DA SILVA, Diego Renan. "Optical Analogue Models for Black Holes and Wormholes", dissertação de mestrado em física, defendida em 30/07/2020 na Unifei (em modo presencial), sob orientação de Renato Klippert. Disponível online em https://repositorio.unifei.edu.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/2363/Dissertação_2021081.pdf?sequence=1&isAllowed=y (acesso em 21/08/2025).

ELLIS, H. G., "Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity", Journal of Mathematical Physics, volume 14, páginas 104-118, 1973.