

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE N VÓRTICES NUM FLUIDO VISCOSO  
BIDIMENSIONAL

Lucas Soares Pereria<sup>1</sup> (IC), Lucas Ruiz dos Santos (PQ)<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Universidade Federal de Itajubá.

**Palavras-chave:** Mecânica Hamiltoniana. Mecânica Lagrangiana. Viscosidade. Vorticidade

**Introdução**

A aplicação da formulação matemática de N vórtices abrange as mais diversas áreas, como meteorologia (eventos climáticos), até mesmo escoamento ao redor das asas de um avião. As descrições matemática e física dos vórtices ajudam no entendimento do fenômeno e a compreensão de casos mais complexos, como a interação entre dois ou mais deles, o qual é a motivação deste trabalho. Este trabalho apresenta um estudo sobre tópicos da Mecânica Clássica, como a formulação Lagrangiana e a aplicação da formulação Hamiltoniana. O trabalho também explora a formulação do problema de N vórtices sem viscosidade, onde são deduzidas as equações de velocidade dos centros de cada vórtice pontual, e com viscosidade, decorrente de soluções particulares da equação de Navier-Stokes para fluidos viscosos bidimensionais. Para isso, foi feita a revisão da literatura das principais referências em estudos sobre vórtices e suas interações em fluidos viscosos bidimensionais.

**Metodologia**

Segundo Andrade (2017), para um fluido incompressível, isentrópico e invíscido, temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o campo de velocidades do fluido. O campo de vorticidade de um escoamento é dado pela seguinte equação

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (2)$$

Considere uma região A contida no plano cuja fronteira é uma curva C. A circulação no fluido sobre esta curva é definida por

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \omega \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3)$$

A equação de Euler-Lagrange, para um sistema

conservativo de forças, é dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (4)$$

onde L é a Lagrangiana do sistema (SPIVAK, 2010).

Sejam  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ ,  $\mathbf{x}_N = (x_N, y_N)$ , as posições dos centros dos N vórtices no plano. A função de fluxo do j-ésimo vórtice é dada por

$$\psi_j(\mathbf{x}) = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j| \quad (5)$$

e o seu campo de vorticidade é dado por

$$\omega_j = -\Delta\psi_j = \Gamma_j\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (6)$$

onde  $\delta$  é o delta de Dirac. O campo de velocidade, sem levar em conta a influência de outros vórtices, é dado por

$$\begin{aligned} u_j &= (\partial_y \psi_j, -\partial_x \psi_j) \\ &= \left( -\frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{y - y_j}{r^2} \right), \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{x - x_j}{r^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|$ . O campo de velocidades do fluido é a soma do campos induzidos por todos os vórtices

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j(x, t), \quad (8)$$

portanto, as velocidades dos centros dos vórtices são dadas por

$$\frac{dx_j}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \frac{\Gamma_i (y_j - y_i)}{r_{ij}^2}, \quad (9)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \frac{\Gamma_i (x_j - x_i)}{r_{ij}^2}, \quad (10)$$

com  $r_{ij} = |x_j - x_i|$ . (CHORIN; MARSDEN, 1990).

### Resultados e discussão

Definindo a Hamiltoniana H como

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \log|x_i - x_j|, \quad (11)$$

temos

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_i \Gamma_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_i \Gamma_j (y_j - y_i)}{r_{ij}^2}. \quad (13)$$

Introduzindo as seguintes variáveis

$$x'_i = \sqrt{|\Gamma_i|} x_i, y'_i = \sqrt{|\Gamma_i|} \text{sgn}(\Gamma_i) y_i, i = 1, 2, \dots, N,$$

onde  $\text{sgn}(\Gamma_i) = 1$ , se  $\Gamma_i > 0$ , e  $\text{sgn}(\Gamma_i) = -1$ , se  $\Gamma_i < 0$ , chegamos em um sistema de equações Hamiltonianas abaixo

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x'_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (14)$$

A equação de Navier-Stokes para a vorticidade em coordenadas polares é dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right), \quad (15)$$

onde r é a coordenada radial. Tomando a condição inicial

$$\omega(r, 0) = \Gamma_0 \delta(x) \delta(y) \quad (16)$$

temos que a solução de (15) é dada por

$$\omega = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} e^{-r^2/(4\nu t)}, \quad \nu = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (17)$$

onde  $\nu$  é a velocidade tangencial ao redor do eixo de rotação do vórtice e  $\Gamma = (1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}})$  (SAFFMAN, 1993). A circulação é uma função do tempo e sempre decrescente a uma distância fixa do vórtice, mas

crescente com a coordenada radial. As equações (17) são chamadas de soluções de Lamb-Oseen. (JING et al., 2010).

A equação (4) gerada pela Lagrangiana

$$L = \pi \sum_{j=1}^N \Gamma_j (r_j \times \dot{r}) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \ln ||r_i - r_j||^2 \quad (18)$$

dão exatamente o sistema (9) e (10). Aplicando (18) em (4), temos

$$\dot{r}_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_j \mathbf{J}(r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^2} \quad (19)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz de rotação por  $90^\circ$  no sentido anti-horário. Como mostrado em (14), o problema dos N vórtices é um sistema hamiltoniano, com Hamiltoniana (11). Para o caso de dois vórtices no plano com  $\Gamma_1, \Gamma_2 \neq 0$ , a Hamiltoniana se reduz a  $H = -\frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \Gamma_2 \log||r_{12}||$ . Para um fluido ideal, desde que H é constante, a distância entre a posição dos dois vórtices será constante para todo  $t \in R$ . O vetor posição relativa é reescrito como

$$\mathbf{x}_{12} = r_1 - r_2 = r_{12}(\cos \theta(t), \sin \theta(t)). \quad (20)$$

Aplicando (19) em (20), temos

$$\dot{\mathbf{x}}_{12} = \dot{r}_1 - \dot{r}_2 = \frac{\Gamma}{2\pi r_{12}^2} \mathbf{J} \mathbf{x}_{12}, \quad (21)$$

sendo que as equações (20) e (21) implicam que o ângulo tem derivada constante

$$\dot{\theta}(t) = \Omega = \frac{\Gamma}{2\pi r_{12}^2}. \quad (22)$$

O problema de três vórtices restrito é construído sobre as soluções de (21). Neste caso, um vórtice de circulação desprezível é transportado pelo campo de velocidades gerado pelos dois outros vórtices. Sejam  $z_1$  e  $z_2$  as posições dos vórtices primários, a posição do vórtice de circulação nula  $z_3$  é solução de

$$\dot{z}_3 = \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \frac{z_3 - z_1}{|z_3 - z_1|^2} + \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \frac{z_3 - z_2}{|z_3 - z_2|^2}. \quad (23)$$

Tome  $z_1 = \xi_1 e^{i\Omega t}$ ,  $z_2 = \xi_2 e^{i\Omega t}$ , onde  $\xi_1, \xi_2$  são números reais,  $\xi_2 > \xi_1$ , e que satisfazem  $\Gamma_1 \xi_1 + \Gamma_2 \xi_2 = 0$ ,  $r_{12} = \xi_2 - \xi_1$ . Fazendo a mudança de variáveis  $\xi_3(t) =$

$z_3(t)e^{-i\Omega t}$  em (23), temos

$$\dot{\xi}_3 = -i\Omega\xi_3 + \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \frac{\xi_3 - \xi_1}{|\xi_3 - \xi_1|^2} + \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \frac{\xi_2 - \xi_1}{|\xi_2 - \xi_1|^2}, \quad (24)$$

A equação (24) é uma equação diferencial autônoma e forma um sistema Hamiltoniano somente na variável  $\xi_3$ . Isso faz com que suas soluções no espaço de fase estejam restritas aos níveis da sua Hamiltoniana

$$H(u, v) = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1-\lambda}{2} \log((u+\lambda)^2 + v^2) + \frac{\lambda}{2} \log((u+\lambda-1)^2 + v^2), \quad (25)$$

onde  $\xi_3 = u + iv$ ,  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 2\pi\Omega$ ,  $\xi_1 = -\lambda$ ,  $\xi_2 = 1 - \lambda$  e  $\Gamma_2 = 2\pi\Omega\lambda$ . Foi feita uma reescala no tempo para tomar  $\Omega = 1$ . As Figuras 1 e 2 ilustram o caso em que os dois vórtices primários têm a mesma circulação,  $\lambda = 1/2$ . O sistema possui 5 pontos de equilíbrio, três pontos do tipo sela sobre a reta dos primários, o que os torna instáveis, e dois fora da reta, os quais formam triângulos equiláteros com os primários. Esses últimos equilíbrios não colineares são pontos de máximo local de (25). Os pontos de equilíbrio de um sistema Hamiltoniano são aqueles que anulam o gradiente H. Sua estabilidade é dada pelos autovalores da função Hessiana de H calculada no equilíbrio. Esta é uma análise simples a ser feita neste caso simétrico, cujo retrato de fase gerado fica ilustrado na Figura 1.

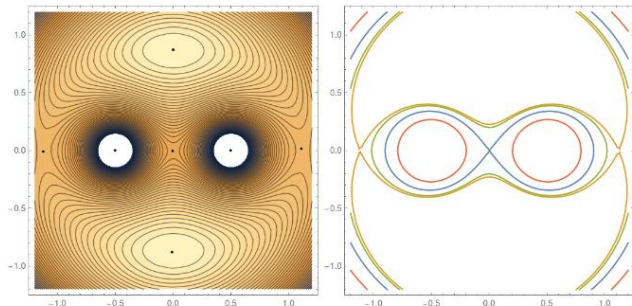


Figura 1 – Trajetória do vórtice de circulação nula sob a influência de dois vórtices de mesma circulação.

A Figura 2 ilustra o caso assimétrico, ou seja, para  $\lambda \neq 1/2$ . Neste caso, os equilíbrios sempre estão sobre a retas dos primários ou formando triângulos equiláteros com eles. Para  $|\lambda| > 1$ , as circulações dos primários têm sinais opostos e, além do equilíbrio de Lagrange, há somente

um equilíbrio sobre a reta dos primários. Para  $|\lambda| < 1$ , a circulação dos primários tem o mesmo sinal, e para qualquer valor de  $\lambda$  os três pontos de sela persistem sobre a reta, além de ter os dois pontos de centro fora dela.

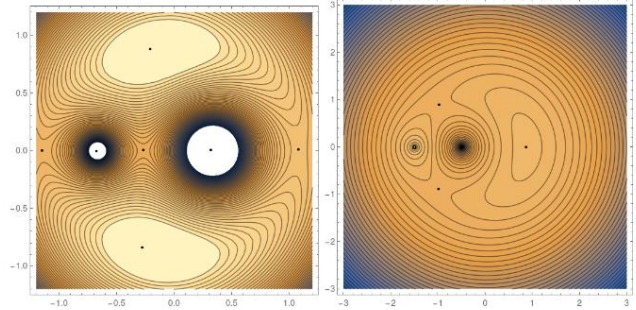


Figura 2 – Trajetórias do vórtice de circulação nula sob efeito de dois vórtices de mesmo sinal, à esquerda, e de sinal oposto, à direita.

Vamos introduzir o decaimento da vorticidade devido à viscosidade, dado pela equação (17), apenas nos vórtices primários. Dessa forma, a equação (24) deve ser alterada para

$$\dot{\xi}_3 = -i\Omega(t)\xi_3 + \frac{i\Gamma_1(\xi_1, \xi_2, t)}{2\pi} \frac{\xi_3 - \xi_1}{|\xi_3 - \xi_1|^2} + \frac{i\Gamma_2(\xi_2, \xi_3, t)}{2\pi} \frac{\xi_2 - \xi_1}{|\xi_2 - \xi_1|^2}, \quad (26)$$

onde

$$\Gamma_j(\xi_j, \xi_3, t) = \Gamma_{0j} \left( 1 - \exp\left(-\frac{|\xi_j - \xi_3|^2}{4vt}\right) \right), \quad (27)$$

$$\Omega(t) = (\Gamma_{01} + \Gamma_{02}) \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{4vt}\right) \right), \quad (28)$$

para  $j = 1, 2$ . Fixando  $\sigma = 1/\sqrt{4vt}$  como um parâmetro que mede o diâmetro do vórtice neste dado instante, a equação de movimento (26) ainda pode ser obtida através de uma Hamiltoniana

$$H(u, v, \sigma) = -\frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{1}{\sigma^2}} \right) (u^2 + v^2) + \frac{\lambda g}{2} \frac{((u+\lambda-1)^2 + v^2)}{\sigma^2} + \frac{(1-\lambda)g}{2} \frac{((u+\lambda)^2 + v^2)}{\sigma^2}, \quad (29)$$

onde  $g$  é a função dada pela primitiva

$$g(x) = \int \frac{1 - e^{-x^2}}{x} dx,$$

que é usada aqui para compor a nova energia potencial para estes vórtices não pontuais. Neste trabalho nos limitamos a fazer uma análise numérica de algumas órbitas especiais com condições iniciais bem escolhidas. A Figura 3 mostra as órbitas de três condições iniciais, nos pontos  $(0, \sqrt{3}/2 - 1/2)$  (órbita azul),  $(0.01, 0.02)$  (órbita vermelha) e  $(0.5, 0.04)$  (órbita verde). Em primeiro lugar, notamos uma superposição das órbitas distintas, desde que o sistema de equações não é mais autônomo, ao contrário do que aconteceu no caso conservativo. Tomamos a condição inicial da órbita azul na região onde as órbitas conservativas circulam o equilíbrio de Lagrange, onde observamos um afastamento da órbita de equilíbrio, o que já era esperado devido ao fato de este ponto ser um máximo da Hamiltoniana original (25). A órbita vermelha se inicia próxima ao ponto de sela que está na origem, o que a faz circular ambos vórtices primários e abandonar esta região. A órbita verde se inicia muito próxima a um dos primários, o que a faz se aproximar muito da colisão, no entanto é repentinamente expulsa da região a fazendo circular do lado externo das separatrizes de sela do sistema conservativo original.

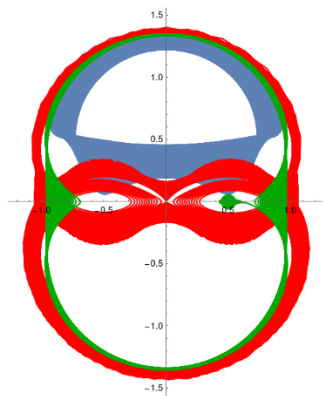


Figura 3 – Integração da equação diferencial completa (26) com condições iniciais  $(u_0, v_0) = (0, \sqrt{3}/2 - 1/2)$  (órbita azul),  $(u_0, v_0) = (0.01, 0.01)$  (órbita vermelha) e  $(u_0, v_0) = (0.5, 0.04)$  (órbita verde).

### Conclusões

Após a realização deste trabalho, foi possível estudar os principais tópicos para a formulação do problema de N vórtices em um fluido viscoso. A formulação Lagrangiana do problema permitiu formular um sistema de equações para modelar a evolução de vórtices pontuais num fluido com viscosidade. A partir dos estudos sobre o problema de N vórtices, foi possível desenvolver um estudo do problema de três vórtices restrito, considerando

que um dos vórtices tem circulação desprezível em relação aos outros dois. A mudança de variáveis neste problema fez com que as soluções no espaço de fase estivessem restritas aos níveis de uma Hamiltoniana. Isso possibilitou um estudo sobre o comportamento dos vórtices quando dois deles possuem a mesma circulação, onde foi possível mostrar que havia 5 pontos de equilíbrio no sistema, sendo três deles do tipo sela e instáveis. Também foi possível perceber que, para o caso assimétrico, todas as situações de equilíbrio sempre ocorreram sobre as retas em que estavam os dois vórtices primários. Para o caso com viscosidade, o comportamento das soluções sofreu variação para cada condição inicial diferente adotada. Com isso, foi possível estabelecer as bases matemáticas e físicas do problema de N vórtices e realizar um estudo paramétrico para o caso restrito de três vórtices.

### Agradecimento

Agradeço a UNIFEI pelo apoio e ao meu orientador, Lucas Ruiz dos Santos, por todo o conhecimento transmitido e amizade.

### Referências

- ANDRADE, C. L. Desenvolvimento de um Algoritmo Acelerador da Modelagem de Turbulência de um Método de Vórtices Discretos Lagrangeano. 2017. 152 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Itajubá, 2017.
- CHORIN, A.J., MARSDEN, J.E. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics., Texts in Applied Mathematics. 1990.
- GOLDSTEIN, H., POOLE, C., SAFKO, J. Classical Mechanics., American Association of Physics Teachers. 2002.
- GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo., Vol. 3. 5ª. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- JING, F., KANSO, E., NEWTON, P.K. Viscous Evolution of Point Vortex Equilibria: The Collinear State., Physics of Fluids. 2010.
- LEMONS, N.A. Mecânica Analítica, Livraria da Física, 2007.
- NEWTON, P.K. The N-Vortex Problem. Analytical Techniques. Applied Mathematics Sciences. (2001).
- SAFFMAN, P.G. Vortex Dynamics. Cambridge University Press. 1993.
- SANTOS, L.R. Efeitos dissipativos em mecânica celeste modelados por corpos pseudo-rígidos. Tese de doutorado. Universidade de São Paulo. 2015.
- SPIVAK, M. Physics for mathematicians: Mechanics I. Publish or Perish. 2010.