UMA NOVA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON COM FONTE PONTUAL ESTACIONÁRIA

João Pedro Ferreira Lemos[1] (IC), Fabrício Augusto Barone Rangel (PQ)[1]
[1] *Universidade Federal de Itajubá*

Palavras-chave: Distribuições. Física Matemática. Teoria de Campos.

Introdução

O problema dos infinitos acompanha a física desde os conceitos mais fundamentais, como por exemplo a densidade de objetos pontuais. A delta de Dirac tornou possível um melhor tratamento das divergências em teoria de campos, fazendo com que seja a melhor ferramenta para descrever, teoricamente, certos fenômenos que ocorram em um dado ponto ou região do espaço. Nós investigamos uma abordagem para lidar com o campo de Klein-Gordon estacionário usando a teoria de Distribuições, que unifica completamente o comportamento do campo em todo o espaço (incluindo a origem) sem precisar da técnica de regularização dimensional tão falada na literatura, também mostramos que é possível gerar distribuições a partir de uma sequência de outras distribuições quando um certo limite é tomado. O trabalho está feito em 3+1 dimensões com a métrica $\eta = Diag(+,-,-,-)$.

Metodologia

O campo de Klein-Gordon estacionário na presença de uma fonte pontual é dado por:

$$\left(\nabla^2 - m^2\right)\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}). \tag{1}$$

É conhecido na literatura que a solução radial, i.e., soluções que dependem apenas do módulo do vetor do posição $|\mathbf{r}| = r$, é dado pelo campo de Yukawa:

$$\phi_{\text{-}}(r) = \frac{e^{-mr}}{r}. \tag{2}$$

Aplicando o operador de Klein-Gordon na solução de Yukawa (2) obtemos que a solução é valida apenas fora da origem, i.e., quando $r \neq 0$. Para verificarmos de fato que a solução de Yukawa satisfaz a equação de Klein-Gordon estacionária também na origem precisamos usar o método de regularização, que consiste em acrescentar um fator ϵ pequeno no denominador da seguinte forma:

$$\phi_{\text{-},\epsilon}(r) = \frac{e^{-mr}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}}. \tag{3}$$

No limite $\epsilon \to 0$ a equação (3) recupera (2). Este método de regularização é comumente encontrado na literatura para soluções que não englobam todo o espaço, que no nosso caso é a origem $r = 0$. Aplicando o operador de Klein-Gordon estacionário na na solução de Yukawa regularizada obtemos:

$$\left(\nabla^2 - m^2\right)\phi_{\text{-},\epsilon}(r) = -\frac{\epsilon^2\left[3r + 2m(r^2+\epsilon^2)\right]e^{-mr}}{r\,(r^2+\epsilon^2)^{5/2}}. \tag{4}$$

Agora precisamos verificar se a equação acima (4) é uma sequência delta, ou seja, alguma função de ϵ que no limite $\epsilon \to 0$ leva as mesmas propriedades da delta de Dirac, que são elas:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}\ \delta_\epsilon(\mathbf{r}) = 1 \tag{5}$$

e:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ \delta_\epsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq 0 \\ \infty, & \mathbf{r} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

onde $\delta_\epsilon(\mathbf{r})$ é uma função da posição $\mathbf{r}$ e ϵ de classe C^∞, a integração em (5) é feita em todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Pela equação (4) notemos que, no limite $\epsilon \to 0$, a equação diverge quando $r = 0$ e se anula para $r \neq 0$. Integrando (4) em todo o espaço $\mathbb{R}^3$ e tomando o limite $\epsilon \to 0$, obtemos:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}\ \left(\nabla^2 - m^2\right)\phi_{\text{-},\epsilon}(r) = -4\pi \tag{7}$$

então chegamos a conclusão que (4) se comporta como uma delta de Dirac no limite $\epsilon \to 0$, verificando a validade da solução do campo de Yukawa em todo o espaço incluindo a origem:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\nabla^2 - m^2\right)\phi_{-,\epsilon}(r) = \left(\nabla^2 - m^2\right)\phi_{-}(r) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \tag{8}$$

que é o que queríamos demonstrar. O método empregado nessa seção acompanhará para o resto do trabalho, todavia é sabido pela literatura que o valor do campo descrito pela equação de Klein-Gordon estacionária possui o valor $-m$ na origem, o que só pode ser demonstrado pelos árduos métodos de regularização em teoria quântica de campos, como a regularização dimensional por exemplo, que consiste em estender o número de dimensões do espaço para D arbitrário e, no final, tomar o limite $D \to 3$:

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \frac{1}{2\pi^2}\lim_{D\to 3}\int \frac{d^D\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\lim_{D\to 3}\frac{\pi^{D/2}\Gamma(1-\frac{D}{2})}{(m^2)^{(1-\frac{D}{2})}} \\ &= -m\end{aligned} \tag{9}$$

onde o método de Fourier foi empregado em (9). Existe outra solução para a equação de Klein-Gordon estacionária com fonte pontual não tão falada na literatura física pelo fato de não poder descrever um campo: a condição de contorno mais básica é violada, i.e., não se anula no infinito. Tal solução é definida por:

$$\phi_{+}(r) = \frac{e^{mr}}{r} \tag{10}$$

a solução (9) compartilha do mesmo problema do campo de Yukawa, ou seja, satisfaz a equação de Klein-Gordon (1) fora da origem, e usando a mesma técnica de regularização no denominador:

$$\phi_{+,\,\epsilon}(r) = \frac{e^{mr}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} \tag{11}$$

obtemos que:

$$\left(\nabla^2 - m^2\right)\phi_{+}(r) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\nabla^2 - m^2\right)\phi_{+,\epsilon}(r) = -4\pi\,\delta^3(\mathbf{r}), \tag{12}$$

e como já dissemos anteriomente, a solução (9) não descreve um campo físico mas será útil na próxima seção.

Resultados e discussão

A metodologia empregada nesse trabalho nos leva ao seguinte questionamento: é possível unificar o comportamento do campo de Yukawa em todo o espaço em uma única expressão matemática? De tal forma que seja possível evitar as técnicas de regularização dimensional, englobando o resultado $-m$ na origem. Sim, há essa possibilidade, porém precisaremos estender a solução para o espaço das funções generalizadas (distribuições), e essa função generalizada deve satisfazer a equação de Klein-Gordon estacionária na presença de uma fonte pontual (1). Definiremos o seguinte campo no espaço de distribuições:

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \Theta(r)\frac{e^{-mr}}{r} - \Theta(-r)\frac{e^{mr}}{r} \\ &= \Theta(r)\ \phi_{-}(r) - \Theta(-r)\ \phi_{+}(r)\end{aligned} \tag{13}$$

onde Θ é a distribuição de Heaviside definida por:

$$\Theta(r) = \begin{cases} 1, & r > 0, \\ \frac{1}{2}, & r = 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Notemos que o campo definido em (11) possui o mesmo comportamento do campo de Yukawa fora da origem. Avaliando o campo definido em (11) na origem $r = 0$, obtemos:

$$\phi(0) = \Theta(0)\lim_{r\to 0}\left(\frac{e^{-mr} - e^{mr}}{r}\right) = -m \tag{15}$$

onde usamos a expansão em séries de Taylor em torno de r, usamos a definição da distribuição de Heaviside (12) na origem e tomamos o limite $r \to 0$. Notemos que o resultado em acima é exatamente o que obtemos na literatura pelos métodos de regularização da teoria quântica de campos para avaliarmos o valor do campo na origem. Para verificarmos se o campo definido em satisfaz a equação de Klein-Gordon estacionária com fonte pontual usaremos o método de regularização usual já mostrada na seção anterior:

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon(r) &= \Theta(r)\frac{e^{-mr}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} - \Theta(-r)\frac{e^{mr}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} \\ &= \Theta(r)\ \phi_{-,\ \epsilon}(r) - \Theta(-r)\ \phi_{+,\ \epsilon}(r)\end{aligned} \tag{16}$$

Aplicando o operador de Klein-Gordon estacionário em (16) e usando que:

$$\frac{d}{dr}\Theta(r) = \delta(r) \tag{17}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2-\mu^2\right)\phi_\epsilon(r) &= \frac{d\delta(r)}{dr}\ \left(\phi_{+,\ \epsilon}(r)+\phi_{-,\ \epsilon}(r)\right) \\ &+ \frac{2\delta(r)}{r}\ \frac{d}{dr}\ r\left(\phi_{+,\ \epsilon}(r)+\phi_{-,\ \epsilon}(r)\right)\end{aligned} \tag{18}$$

A equação acima é naturalmente divergente na origem e nula longe dela, pela própria definição da delta de Dirac em (6). Integrando em todo o espaço e usando a propriedade da derivada da delta de Dirac:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi(x)\frac{d}{dx}\delta(x) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x)\frac{d}{dx}\psi(x) \\ &= -\psi'(0)\end{aligned} \tag{19}$$

onde $\psi(x) \in C^\infty$, juntamente com:

$$\int_0^{+\infty} dx\ \delta(x) = \frac{1}{2} \tag{20}$$

esta última propriedade poder ser construida a partir das sequências deltas em (5), obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}\ \left(\nabla^2-\mu^2\right)\phi_\epsilon(r) = -4\pi \tag{21}$$

verificamos que (18) se comporta como uma *sequência delta no espaço de Distribuições*, demonstrando que o campo ϕ definido em em (12) é uma solução da equação de Klein-Gordon estacionária na presença de uma fonte pontual no espaço de distribuições:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\nabla^2-\mu^2\right)\phi_\epsilon(r) &= \left(\nabla^2-\mu^2\right)\phi(r) \\ &= -4\pi\delta^3(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{22}$$

como queríamos demonstrar. Como consequência da análise, mostramos que é possível construir distribuições a partir de uma sequência de *outras distribuições*, algo não explorado na literatura físico-matemática até onde sabemos, a definição atual de uma distribuição é dada por uma sequência de funções que, em um certo limite, geram as propriedades da distribuição requisitada, ou seja, uma associação entre espaços.

Conclusões

Nós investigamos a equação de Klein-Gordon estacionária e propomos uma nova solução (até onde sabemos) no espaço de Distribuições que generaliza o comportamento do campo em todo o espaço, incluindo o resultado na origem $(-m)$ demonstrado facilmente por técnicas elementares de cálculo. Também demonstramos a possibilidade de construir distribuições a partir de outras distribuições quando um certo limite é tomado. Apesar do interesse físico e matemático, a teoria das Distribuições nos permite unificar alguns aspectos da teoria de campos que até então são tratadas de forma separada e, por aspectos demonstrados na discussão, talvez seja possível generalizar a ideia sobre o que é uma distribuição, ampliando nosso conhecimento acerca dessa área tão nova e próspera da física matemática

Agradecimento

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro para a execução do trabalho e à UNIFEI pela oportunidade de trabalho.

Referências

M. Kaku, Quantum Field Theory: A Modern Introduction (Oxford University Press, 1993).

G. T. Camilo, F. A. Barone, and F. E. Barone, Interactions between delta-like sources and potentials, Phys. Rev. D 87, 025011 (2013).

J. Colombeau, New Generalized Functions and Multiplication of Distributions, ISSN (Elsevier, 2000).

B. Felsager, Geometry, Particle, and Fields (Springer,1998).