OBTENÇÃO DE MODELOS ANÁLOGOS EM MEIOS ÓTICOS NÃO-LINEARES

Guilherme Roberto Tavares[1] (IC), Vitorio Alberto De Lorenci (PQ)[1]
[1]*Universidade Federal de Itajubá..*

Palavras-chave: Modelo análogo. Ótica não-linear. Relações constitutivas.

Introdução

Neste trabalho, investigamos modelos análogos de gravitação em ótica não linear. Para isso, é de suma importância a compreensão do eletromagnetismo de Maxwell, que nos fornece as informações necessárias a respeito do comportamento de uma onda eletromagnética se propagando em um dado meio material, e da teoria da relatividade geral que nos possibilita realizar uma descrição geométrica efetiva dos fenômenos óticos. Para o meio proposto, iremos observar que uma onda eletromagnética se propagando neste dado meio, com relações constitutivas específicas, irá sofrer o fenômeno de birrefringência. O modelo análogo será confeccionado a partir das informações obtidas pelo problema ótico proposto.

Metodologia

Iniciamos com as relações constitutivas específicas para este trabalho

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\vec{E},\vec{B},\vec{r})E_j$$
$$H_i = \mu_{ij}^{(-1)}(\vec{E},\vec{B},t)B_j$$

e usando que

$$E_i = E_i^0 + e_i\, exp\,(i\,(\omega t - \vec{r}\cdot\vec{q}))$$
$$B_i = B_i^0 + b_i\, exp\,(i\,(\omega t - \vec{r}\cdot\vec{q})),$$

onde o primeiro termo de cada campo se deve a uma fonte externa constante e o segundo termo a uma onda plana monocromática, de modo que a magnitude do campo externo é muito maior do que a da onda monocromática. Assim, substituindo as relações constitutivas na lei de Ampère-Maxwell e os campos acima na lei de Faraday (ZANGWILL, 2013) para eliminar o vetor de polarização magnética em favor do vetor de polarização elétrica. Adicionalmente, usando que o meio material de interesse possui características tais que

$$\varepsilon_{ij} = diag\big(\varepsilon_1(\vec{r}),\varepsilon_2(\vec{r}),\varepsilon_3(\vec{r})\big)$$
$$\mu_{ij}^{(-1)} = diag\big(\mu^{(-1)}(t)/\lambda, \mu^{(-1)}(t), \mu^{(-1)}(t)\big).$$

sendo λ um parâmetro de proporcionalidade entre as componentes da permeabilidade magnética. Obtemos a seguinte equação de autovalores a ser resolvida (DE LORENCI, 2022)

$$Z_{ij}e_j = 0$$

a qual

$$Z_{ij} = \varepsilon_{ij}v^2 + \epsilon_{imn}\epsilon_{jkl}\mu_{nk}^{(-1)}\kappa_l\kappa_m.$$

O vetor e_j é chamado de vetor de polarização e a matriz Z_{ij} é chamada de matriz de Fresnel.

Portanto, soluções não triviais da equação acima implicam em um determinante nulo da matriz de Fresnel. Para resolver tal equação, vamos supor que a onda eletromagnética esteja se propagando em três direções perpendiculares entre si. Primeiro vamos supor uma onda eletromagnética se propagando na direção (1, 0, 0), resultando nas velocidades de fase abaixo:

$$v_1^{\pm} = \pm\, 1/\sqrt{\varepsilon_2\mu}$$
$$v_2^{\pm} = \pm\, 1/\sqrt{\varepsilon_3\mu}$$

sendo as polarizações, associadas às velocidades $v_1^{\pm}$ e $v_2^{\pm}$, respectivamente, tais que $\widehat{e_1} = (0,1,0)$ e $\widehat{e_2} = (0,0,1)$.

Para a direção de propagação na direção (0, 1, 0), obtemos que as velocidades de fase são dadas por

$$v_1^{\pm} = \pm\, 1/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$$
$$v_2^{\pm} = \pm\, 1/\sqrt{\varepsilon_3\mu_1}$$

com vetores de polarização dados por $\widehat{e_1} = (1,0,0)$ e $\widehat{e_2} = (0,0,1)$.

Por último, supondo a onda se propagando na direção (0, 0, 1), obtemos que as velocidades de fase são

$$v_1^{\pm} = \pm\, 1/\sqrt{\varepsilon_1\mu}$$
$$v_2^{\pm} = \pm\, 1/\sqrt{\varepsilon_2\mu_1}$$

com vetores de polarização dados por $\widehat{e_1} = (0,1,0)$ e $\widehat{e_2} = (1,0,0)$.

Utilizamos, para os três casos, que $\mu_1 = \mu/\lambda$.

Nota-se que nos três casos analisados ocorre o fenômeno de birrefringência.

Resultados e discussão

Com o problema ótico resolvido, vamos para a confecção do modelo análogo. Para tal, iremos utilizar unidades naturais, que definem c = 1, e vamos definir dois quadrivetores

$$k^{\mu} = (\omega, \vec{q})$$
$$V^{\mu} = \delta_{0}^{\mu}$$

onde V^{μ} é um campo de velocidades definido em um referencial em repouso com relação ao material e $\vec{q}$ o vetor de onda.

Assim, podemos escrever

$$\omega^2 = k_{\mu}k_{\nu}V^{\mu}V^{\nu}$$
$$k^2 = \eta^{\mu\nu}k_{\nu}k_{\nu}.$$

Da eletrodinâmica clássica (ZANGWILL, 2013), sabemos que

$$k^2 = \omega^2 - q^2$$
$$v^2 = \omega^2/q^2,$$

de forma que obtemos

$$\omega^2 = v^2(\omega^2 - k^2).$$

Portanto, substituindo as relações acima para ω^2 e k^2, encontramos

$$k_{\mu}k_{\nu}(v^2\eta^{\mu\nu} + (1 - v^2)V^{\mu}V^{\nu}) = 0.$$

Assim, identificamos a inversa da geometria efetiva (DE LORENCI *et al.*, 2022), como

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{v^2}\right)V^{\mu}V^{\nu}$$

de modo que a geometria efetiva (DE LORENCI *et al.*, 2022), vem dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - (1 - v^2)V_{\mu}V_{\nu}$$

onde a velocidade v^2 foram calculadas anteriormente, na análise do problema ótico.

Com isso, concluímos que o quadrivetor k_{μ} é um vetor nulo para a geometria efetiva, assim como este é para o tensor métrico de Minkowski, nos mostrando que há uma analogia entre ótica e gravitação.

Para finalizar, podemos definir o elemento infinitesimal de linha ds^2 (FOSTER *et al.*, 1995), mas como ditamos a direção de propagação da onda eletromagnética, teremos um elemento de linha para cada direção adotada. Estes sendo:

$$ds_x^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dx^2$$
$$ds_y^2 = g_{00}dt^2 + g_{22}dy^2$$
$$ds_z^2 = g_{00}dt^2 + g_{33}dz^2$$

Os subescritos em ds^2 se referem a direção de propagação da onda eletromagnética.

Conclusões

A possibilidade de obtermos uma analogia entre ótica e gravitação nos possibilitou encontrar um modelo baseado em um meio material apresentando permissividade elétrica biaxial e permeabilidade magnética monoaxial, visto que tal modelo, levando em conta as simplificações feitas, foi bastante simples e ainda capaz de elucidar o processo de obtenção destes modelos análogos. Este resultado nos é importante para que continuemos com seu desenvolvimento e até para que possamos propor outros meios materiais, que poderia nos levar à diferentes cenários. Interpretações físicas podem ser feitas deste modelo ao estudar quais métricas que são soluções da relatividade geral teriam a forma equivalente com a que obtemos anteriormente.

Agradecimento

Agradeço ao meu orientador, Vitorio Alberto De Lorenci, pelas conversas sobre física, mas também pelos ensinamentos sobre a carreira científica. Também, agradeço ao CNPq pelo incentivo em forma de uma bolsa mensal e a UNIFEI por me proporcionar a oportunidade de estudar com uma estrutura excelente.

Referências

DE LORENCI, Vitorio A. Aspects of wave propagation in a nonlinear medium: Birefringence and the second-order magnetoelectric coefficients. **Physical Review A**, v. 105, n. 2, p. 023530, 2022.

DE LORENCI, V. A; DE PAULA, L. T, Analog models of gravity in optical systems: linear magnetoelectrics and beyond. **arXiv preprint**, arXiv: 2205.05149, 2022.

FOSTER, James; NIGHTINGALE, J. David; FOSTER, J. **A short course in General Relativity**. New York: Springer-Verlag, 1995.

ZANGWILL, Andrew. **Modern electrodynamics**. Cambridge University Press, 2013.