

## PROPRIEDADES DAS CONFIGURAÇÕES CENTRAIS NOS PROBLEMAS DE MAXWELL E N VÓRTICES

Luís Gustavo Sampaio Bueno<sup>1</sup> (IC), Lucas Ruiz dos Santos (PQ)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá.

**Palavras-chave:** Mecânica. Problema de N-Corpos. Índice de Morse. Potencial Homogêneo.

### Introdução

Em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, motivado pelo estudo do movimento dos planetas em torno do Sol, Sir. Isaac Newton resolveu o que chamamos hoje de Problema de 2 Corpos, com potencial gravitacional. Tentativas de resolver o caso geral desse problema motivam matemáticos e físicos a séculos, graças a essas tentativas inúmeras áreas da Mecânica Celeste e da Física Matemática em geral puderam se desenvolver. (FERNANDES, 2011)

As generalizações que se seguiram séculos após o estudo de Newton consistiam principalmente de adaptações no potencial gravitacional, e da inserção de potenciais específicos, tais tipos de generalizações têm motivação física. Generalizações para potenciais com leis de potências mais gerais vieram mais recentemente, e tem, principalmente, motivação matemática.

O que chamamos de solução geral para o Problema de N-Corpos (PNC) ainda se encontra em aberto, o que se tem atualmente são soluções particulares e carregadas de hipóteses simplificadoras. Uma área de estudos promissora no campo dos N-Corpos é o estudo das Configurações Centrais (CC). Dizemos que  $N$  corpos estão em CC quando a aceleração de cada corpo é um múltiplo escalar da posição de cada corpo.

O objetivo desse trabalho é estudar e compreender os principais aspectos da Dinâmica Hamiltoniana, do Problema de N-Corpos, das Configurações Centrais e estudar, por linhas gerais, as propriedades do Índice de Morse em configurações especiais, em particular nos polígonos regulares.

Como já dito, a formulação geral do Problema de N-Corpos se dá pela generalização do problema clássico, i.e., pela substituição do potencial gravitacional por um potencial geral. Estaremos particularmente interessados no caso em que esse potencial é dado por uma função homogênea. Uma vez feita a generalização

do potencial Newtoniano para uma lei de potências  $A$  arbitrária, Hampton (2019) explora a relação da Teoria de Morse com o PNC, o autor calcula o índice de Morse para polígonos regulares na tentativa de estabelecer relações entre a topologia dos polígonos e as configurações centrais correspondentes.

Por fim, usamos Hampton (2019) e Fernandes et al. (2021) para calcular o índice de Morse para famílias de CC no problema de 5 corpos com eixo de simetria e na implementação no *software* Mathematica® de um algoritmo para o cálculo numérico do índice de Morse, estendendo a discussão para as configurações de Maxwell. É importante ressaltar que embora possam valer as propriedades para o caso geral, os cálculos feitos em nosso trabalho estão restritos ao caso do potencial newtoniano.

### Metodologia

A Metodologia do trabalho se concentra, mas não se limita, ao estudo orientado das referências por meio de reuniões entre o orientador e o orientado.

De acordo com Lemos (2007) a formulação Hamiltoniana da Mecânica possui inúmeras vantagens em relação à formalização Lagrangiana, e é ela que possibilita os alicerces teóricos das Mecânicas Quântica e Estatística. Definida uma função principal de Lagrange, deduzimos as chamadas equações de Hamilton, que irão originar um sistema de equações diferenciais ordinárias que regem a dinâmica do sistema. Essas equações estão descritas nas Figuras 1 e 2:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i.$$

Figura 1 – 1ª Equação de Hamilton

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

Figura 2 – 2ª Equação de Hamilton

Sendo  $H$  a Hamiltoniana de um dado sistema, se  $H$  não depende explicitamente do tempo, é invariante por translação e por rotação, então o sistema conserva energia total, momento linear e momento angular respectivamente.

Dados  $N$  corpos descritos pelo vetor posição  $q = (q_1, \dots, q_N)$  dizemos que esses corpos estão em configuração central se existe um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\ddot{q} = \lambda q$$

Figura 3 – Equação de Configuração Central

Ou seja, quando a aceleração de cada corpo é um múltiplo escalar da posição de cada corpo, em outras palavras, cada corpo é acelerado em direção ao centro de massa do sistema a uma taxa uniformemente proporcional à sua distância ao centro de massa.

Segundo Fernandes (2011) uma importante ferramenta para determinar se uma dada configuração não colinear é ou não uma configuração central são as chamadas equações de Andoyer, tais equações estão descritas na Figura 4:

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{ij}) \Delta_{ijk} = 0$$

Figura 4 – Equações de Andoyer com áreas em  $\mathbb{R}^3$

onde  $R_{ij} = |q_i - q_j|^{-3} = R_{ji}$  e  $\Delta_{ijk}$  é duas vezes a área com sinal do triângulo formado pelas posições das massas de índices  $i, j$  e  $k$ . Ainda em Fernandes (2011) demonstra-se que:

**Teorema 1:** Uma dada configuração de massas não colinear é uma CC se, e somente se cada  $f_{ij}$  é nulo.

Nesse sentido, as equações de Andoyer são equivalentes às equações de configurações centrais. Baseados em Fernandes (2011), em nosso trabalho, recorreremos a tais equações para demonstrar que a única configuração

central de três corpos, não colinear, é o triângulo equilátero, com massas arbitrárias em seus vértices.

Dada uma função duas vezes diferenciáveis, o índice de Morse da dada função é o número de autovalores negativos de sua matriz Hessiana (MILNOR, 1963). O seguinte resultado é de suma importância:

**Teorema 2:** Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Pelo Teorema de Clairaut para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Dessa forma, a matriz Hessiana de  $f$  cujas componentes são as derivadas segundas, é uma matriz simétrica e portanto diagonalizável. O número de autovalores negativos que ocorrem na sua forma diagonalizada, em um dado ponto crítico é o índice de Morse de  $f$  nesse ponto.

Não é completamente claro o quanto o índice de Morse afeta o comportamento dinâmico das órbitas vizinhas às configurações centrais, contudo quando o índice de Morse é nulo para a função  $f$ , há a existência de um mínimo local, o que segundo Montaldi (2015) sugere haver uma grande família de configurações centrais simétricas, além disso, a nulidade do índice sugere estabilidade linear das órbitas. (HAMPTON, 2019).

Como já citado, Hampton (2019) se preocupa em calcular o índice de Morse para a função definida pela Figura 5

$$f = \frac{MI}{2} + \frac{U}{A-2}$$

Figura 5 – Definição de  $f$

onde  $M$  é a massa total do sistema,  $I$  o momento de inércia total,  $U$  é o potencial e  $A$  é um parâmetro real. Note que  $I = I(q_1, \dots, q_n)$  e  $U = U(q_1, \dots, q_n)$ .

Demonstramos no trabalho que os pontos críticos de  $f$  são CC do problema usado na construção da função.

Estamos interessados na hipótese de que os corpos estejam dispostos sobre os vértices de um polígono regular e tenham todos massas iguais.

A função definida acima tem domínio  $\mathbb{R}^{2N}$ , porém é necessário definir a função no espaço de configurações dado pelo quociente definido na Figura 6:

$$\mathcal{C}_N := (\mathbb{R}^{2N} \setminus \Delta) / S^1,$$

Figura 6 – Espaço de Configuração

onde  $\Delta$  é o conjunto de colisões e  $S^1$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^2$ . Hampton (2019) demonstra o seguinte resultado:

**Teorema 3:** Para  $f$  definida como na figura 5, no Problema de  $N$ - Vórtices, ou seja, com potencial logarítmico ( $A = 2$ ), os únicos autovalores da Hessiana sobre a configuração dos polígonos regulares são

$$(2 - i)N + \frac{(i^2 - i)}{N - 1}N, \text{ e } \lfloor \frac{1}{2}N - \frac{i^2}{2} \rfloor,$$

para  $0 \leq i \leq N - 1$ . Portanto, para esse potencial, sobre o espaço de configuração, o polígono regular tem índice de Morse conforme abaixo:

1. 0, se  $N \in \{3, 4, 5, 6\}$
2. degenerado, ou seja, possui autovalor nulo se  $N = 7$ .
3.  $N - 5$ , se  $N \geq 8$

Em Fernandes et al. (2021) é dada uma caracterização completa de todas as famílias, conexas, de configurações centrais com 5 corpos admitindo um eixo de simetria. Mais precisamente, enumerando os corpos de 1 a 5, consideramos as triplas de corpos 1, 2 e 3 e 4, 5 e 3 formando dois triângulos isósceles com um vértice em comum, 3, estando este último corpo sobre um eixo de simetria da configuração, conforme ilustrada na Figura 7, retirada de Fernandes et al. (2021).

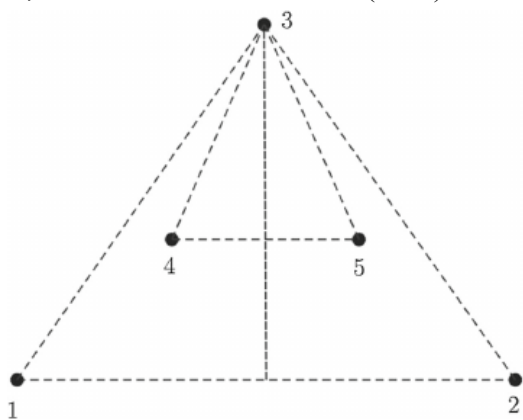


Figura 7 – Posições dos 5 corpos formando dois triângulos isósceles

Em Fernandes et al. se demonstra que, exceto em alguns

casos, existem 6 famílias diferentes (conexas) de configurações centrais cuja representação se encontra na Figura 8, retirada de Fernandes et al. (2021).

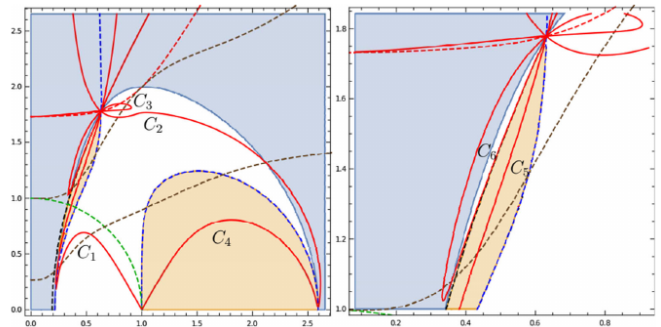


Figura 8 – Representantes das 6 famílias de Configurações Centrais

### Resultados e discussão

Como aplicação do conceito de índice de Morse para configurações centrais, fazemos um estudo numérico sobre como este índice se comporta sobre as famílias de soluções. Estendemos a análise inclusive para o problema de Maxwell, ou seja, onde a massa  $m_3$  é negativa, correspondente à região azul da Figura 9. Mostramos que para as famílias estudadas, todas as soluções na região de massas positivas têm índice de Morse nulo, mas apresentando diversas variações na região das configurações de Maxwell. Como já dito, a nulidade do índice de Morse na região de massas positivas sugere estabilidade linear das órbitas.

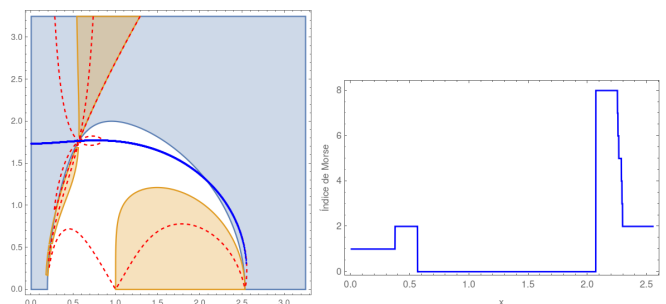


Figura 9 – Representação da variação em  $x$  para o índice de Morse da curva azul em destaque.

Note que enquanto a curva azul se encontra na região de configurações de Maxwell possui índice de Morse não nulo e a partir do momento em que adentra a região de massas positivas mantém índice nulo, conforme já citado acima. Um comportamento similar pode ser

observado na Figura 10:

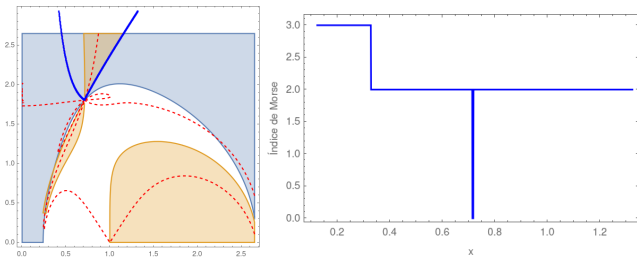


Figura 10 – Representação da variação em  $x$  para o índice de Morse da curva azul em destaque.

Na Figura 11 a seguir perceba que quando a curva azul se aproxima da região azul, há erros numéricos por conta da divergência das massas, não sugerindo que há de fato mudança do índice da curva nessas vizinhanças.

Contudo, perceba que na maior parte das curvas o índice de Morse permanece igual a 2 na região de massas negativas.

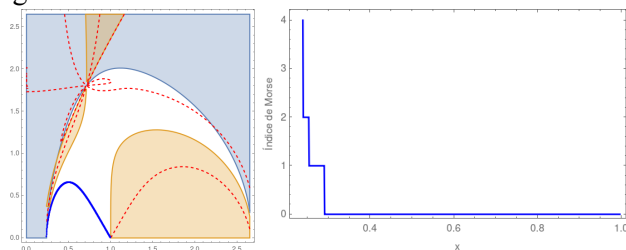


Figura 11 – Representação da variação em  $x$  para o índice de Morse da curva azul em destaque.

Era esperado que o índice de Morse apresentasse comportamento diferenciado no ponto singular descrito nas Figuras, onde várias famílias de configurações se tocam, devido à geometria singular desse ponto, porém no tratamento dado, salvo erros numéricos, não se evidenciou mudança significativa em seu comportamento, nem para a curva em destaque na Figura 9, nem para as demais análises feitas em nosso texto.

## Conclusões

Diante ao exposto pode-se concluir que desde Newton até os dias atuais muitos estudiosos se dedicaram a estudar o PNC e graças a eles a Mecânica Celeste e a Matemática em geral puderam se desenvolver.

Ressalta-se a potencialidade do uso da Teoria de Morse no estudo das configurações centrais, e a importância do estudo dessa área tão promissora para a Mecânica Celeste. Um resultado numérico obtido para o potencial

newtoniano e sobre as hipóteses de nosso trabalho sugerem que, de fato, as condições de massas positivas e razões como definidas em Fernandes et. al. fornecem índice de Morse nulo, o que sugere a estabilidade das soluções.

Destaca-se que embora muitas descobertas tenham sido feitas, ainda há muito mais perguntas do que havia naquela época, sendo assim a pesquisa científica no campo da Mecânica Celeste ainda tem inúmeros obstáculos, em verdade, são esses obstáculos e desafios que movem o espírito do conhecimento e do desenvolvimento da Matemática.

## Agradecimento

Ao Prof. Dr. Lucas Ruiz dos Santos pela orientação e amizade.

A Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) UNIFEI/UNIÃO pelo apoio financeiro.

## Referências

FERNANDES, Antônio Carlos. **Sobre Configurações Centrais do Problema de N-Corpos, Configurações Centrais Planares, Espaciais e Empilhadas**. IME-USP, 2011.

FERNANDES, Antônio Carlos et al. **Central configurations of the five-body problem with two isosceles triangles**. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, p. 1-18. 2021.

HAMPTON, Marshal. **Planar N-body central configurations with a homogeneous potential**. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, p. 1-27, ago. 2019.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica Analítica**. 2. ed. Livraria da Física, 2007.

MILNOR, J. **Morse Theory**. Princeton University Press, 1963.

MONTALDI, J. **Existence of symmetric central configurations**. Celestial Mechanics And Dynamical Astronomy, v. 122, n. 8, p. 405-418, nov. 2015.