

COMPARAÇÃO DE TÉCNICAS DE PROBLEMAS INVERSOS PARA DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURAS EM PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR

Gustavo Cardoso Zotin¹ (IC), Sandro M. M. de Lima e Silva (PQ)¹

¹Universidade Federal de Itajubá.

Palavras-chave: IHCP. MATLAB®. Método das diferenças finitas. Problemas inversos. Transferência de calor.

Introdução

O estudo térmico é cada vez mais requisitado na engenharia, tendo em vista a grande necessidade de otimização de processos e produtos. Dessa forma, é de extrema importância a obtenção do campo de temperaturas e/ou de alguma condição de contorno, sob a qual o objeto de análise está submetido.

Em problemas de condução de calor, a obtenção desse campo de temperaturas pode ser feita de maneira direta, a partir do fluxo de calor imposto em função do tempo. Já a obtenção de condições de contorno, como o fluxo imposto, pode ser realizada através do histórico de temperaturas em determinado ponto do mesmo abordando o problema de condução de calor como um problema inverso.

O objetivo deste trabalho é realizar comparações entre dois métodos de solução de problemas diretos e dois métodos de solução de problemas inversos, além de fazer considerações individuais de cada. Os métodos dos problemas diretos foram ambos de diferenças finitas parabólicas, sendo um explícito e outro implícito. Já os métodos dos problemas inversos foram os de Stoltz e da Função Especificada.

Os métodos foram desenvolvidos numericamente pelo *software* comercial MATLAB® e performaram dois experimentos de terceiros, sendo um para cada tipo de problema, para que fosse possível realizar uma validação dos algoritmos com dados experimentais já coletados.

A análise foi baseada em tempos de solução, estatísticas dos resíduos e na análise qualitativa dos gráficos obtidos.

Metodologia

Para a obtenção do campo de temperaturas de um problema de condução de calor é necessário resolver a

equação da difusão de calor. Considerando um problema unidimensional, propriedades térmicas constantes e sem geração interna, a equação da difusão de calor fica:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

Os métodos das diferenças finitas abordam as derivadas parciais, substituindo-as por diferenças finitas. Assim, sendo possíveis resolvê-las numericamente.

A equação da difusão do calor, com as devidas substituições da formulação explícita fica:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1}^p - 2T_m^p + T_{m-1}^p}{(\Delta x)^2} \quad (2)$$

Para a formulação explícita é introduzido o conceito do número de Fourier, que serve como um critério para avaliar a estabilidade e convergência da solução.

$$F_o = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \quad (3)$$

Já a equação da difusão do calor, na forma implícita fica:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1}^{p+1} - 2T_m^{p+1} + T_{m-1}^{p+1}}{(\Delta x)^2} \quad (4)$$

Para a resolução do método implícito é necessária a utilização de uma técnica de resolução de sistemas lineares. A escolhida foi *Gauss-Seidel*, devido ao sistema ser tridiagonal, permitindo uma solução eficiente por essa técnica.

O estudo de Tillmann et al. (2008) foi utilizado como validação para os programas criados, referentes aos métodos das diferenças finitas.

Nos problemas inversos em condução de calor é

necessário a obtenção da sensibilidade do modelo térmico. Sendo assim, a solução da distribuição de temperaturas de um problema unidimensional, linear, em que a aplicação de fluxo de calor é em uma extremidade e a outra é isolada é chamada de T^+ e a sensibilidade pode ser obtida por:

$$\phi = T^+ \frac{L}{k} \quad (5)$$

Em que L é o comprimento do corpo e k , a condutividade térmica.

O método de Stoltz assume o fluxo de calor da próxima iteração temporal como sendo constante, para o cálculo da temperatura estimada. Assim, a equação que estima o fluxo de calor, a partir do histórico de temperaturas e dos fluxos já estimados é dada por:

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - T_0 - \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta \phi_{M-1}}{\phi_1} \quad (6)$$

Já o método das funções especificadas assume o fluxo de calor dos próximos (r) tempos futuros como sendo constantes para o cálculo da temperatura estimada. Assim, sua equação para estimar o fluxo de calor fica:

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} |_{q_M=\dots=0}) \phi_i}{\sum_{i=1}^r \phi_i^2} \quad (7)$$

O estudo de Silva, Silva Neto e Guimarães (2001) foi utilizado como validação para os programas criados, referentes ao método de Stoltz e das diferenças finitas.

Para cada um dos quatro métodos avaliados, foram desenvolvidos programas na linguagem MATLAB® e performados segundo os dados referentes à cada tipo de problema, direto ou inverso.

Resultados e discussão

Para cada método avaliado, 10 rodadas de simulação foram executadas, foi gerado um gráfico contendo a curva calculada/estimada, uma curva de referência e uma curva dos resíduos. Além disso, duas tabelas foram criadas, uma para cada tipo de problema, contendo os tempos de solução e estatísticas dos resíduos.

O valor do número de Fourier foi de 0,1274 e como é menor que 0,5, a solução é estável e convergente.

Os resultados dos métodos de diferenças finitas parabólicas podem ser encontrados na Tabela 1.

Método	Tempo de solução [s]	Resíduo médio [°C]	Desvio padrão dos resíduos [°C]
Explícito	0,0500	-0,0016	0,0028
Implícito	1,0209	-0,0016	0,0087

Tabela 1 – Resultados Diferenças Finitas

Nas Figuras 1 e 2 é possível visualizar a relação entre as temperaturas analíticas e as calculadas pelos métodos Explícito e Implícito.

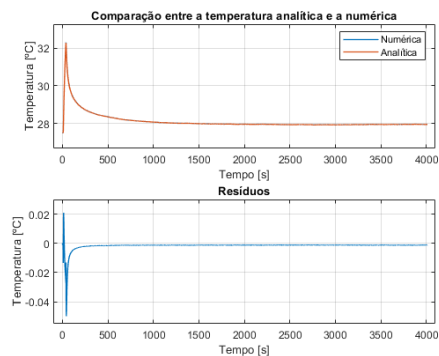


Figura 1 – Distribuição de temperaturas pelo Método Explícito

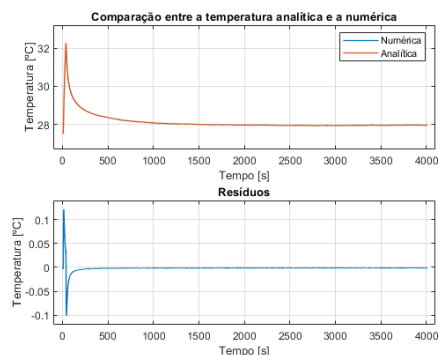


Figura 2b – Distribuição de temperaturas pelo Método Implícito

Os resultados dos métodos de Stoltz e da Função Especificada podem ser encontrados na Tabela 2.

Método	Tempo de solução [s]	Resíduo médio [W/m²]	Desvio padrão dos resíduos [W/m²]
Stoltz	0,036	11,747	224,225
SFSM (r=5)	0,238	12,704	48,297
SFSM (r=10)	0,263	12,483	30,805
SFSM (r=15)	0,260	12,336	28,200
SFSM (r=20)	0,266	12,167	27,222
SFSM (r=25)	0,259	11,819	26,712

Tabela 2 – Resultados Problemas Inversos

A seguir, na Figura 1, é apresentado um dos melhores resultados para a estimação do fluxo de calor, levando em consideração a quantidade de tempos futuros, tempo de solução, estatísticas dos resíduos e a minimização dos efeitos dos dados de entrada ruidosos.

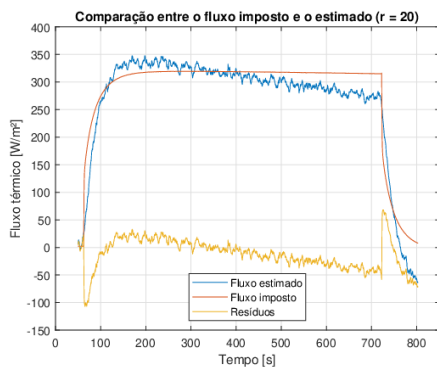


Figura 3 – Fluxo estimado SFSM com 20 passos de tempo futuros

Conclusões

Ambos métodos de diferenças finitas performaram bons resultados. A partir dos resultados é possível notar que o método explícito realizou os cálculos em cerca de 20 vezes mais rápido que o método implícito. Quanto às estatísticas dos resíduos, não apresentam diferenças significativas. Vale ressaltar que a simulação, e ensaio em questão, são relativamente simples, assim sendo nítida a vantagem de utilizar o método explícito por ganho de tempo em simulações não complexas. No entanto, quando se trata de um problema de maior dimensão, com limitações geométricas e, principalmente, da discretização espacial, o método implícito se torna o mais interessante, devido a não ser limitado no quesito da estabilidade e convergência.

O método de Stoltz não apresentou bons resultados, o que já era esperado por se tratar de um método sensível a ruídos e que, atualmente, serve somente para fins comparativos e base de desenvolvimento para outros métodos mais robustos.

Já os resultados obtidos pelo método sequencial da Função Especificada apresentaram uma boa qualidade, principalmente pela possibilidade de utilizar diferentes tempos futuros, assim, tendo um controle maior na qualidade do fluxo estimado. A respeito dos diferentes tempos futuros utilizados, é possível notar que com o aumento da quantidade de tempos, os *plots* de fluxo apresentam menores amplitudes, minimizando os efeitos

dos dados de entrada ruidosos. Outro ponto interessante é que por mais que a amplitude diminua com o aumento do número de tempos, a média dos resíduos sofre uma diminuição insignificante para todos os ensaios e o desvio padrão dos resíduos a partir de 15 tempos futuros também.

Assim, a partir dos resultados obtidos é possível notar que o método mais adequado para a estimação de fluxo de calor é o método da Função Especificada, por garantir resultados mais assertivos, um maior controle de na estimação e lidar melhor com ruídos nos dados, que estão sempre presentes em qualquer coleta de dados.

Agradecimento

Agradeço aos meus pais, Márcia e Ulisses, pelo incentivo e apoio durante toda a minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva pela oportunidade de iniciar no meio acadêmico e orientação dada ao decorrer deste trabalho.

À minha família, e em especial ao meu avô Inércio por ser um dos motivos de ter escolhido a engenharia.

Ao doutorando Fábio pela oportunidade de trabalharmos em projetos do LabTC.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro através da concessão de uma bolsa de iniciação científica.

Referências

- BECK, J.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. **Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems**. Wiley, 1985.
- LIMA e SILVA, S. M. M.; GUIMARÃES, Gilmar; SILVA NETO, A. J. Uma Técnica para Determinação da Capacidade de Calor Volumétrica do Alumínio 5052. In: **Congresso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica**, 2001, Mérida. V CIDIM y IV CONIM, 2001. v. CDROM. p. 1-6.
- Tillmann, Amanda R.; BORGES, Valério Luiz; GUIMARÃES, Gilmar; LIMA e SILVA, Ana Lúcia Fernandes; Lima e Silva, Sandro M. M. de. Identification of temperature-dependent thermal properties of solid materials. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 30, p. 269-278, 2008.