

## COMPARAÇÃO DE TÉCNICAS DE PROBLEMAS INVERSOS PARA ESTIMAÇÃO DE FLUXO DE CALOR EM PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR

Gustavo Cardoso Zotin<sup>1</sup> (IC), Sandro M. M. de Lima e Silva (PQ)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Itajubá.

**Palavras-chave:** COMSOL<sup>®</sup>. MATLAB<sup>®</sup>. Problemas inversos. Transferência de calor.

### Introdução

A estimação precisa do fluxo de calor desempenha um papel fundamental na otimização de processos industriais, garantindo a eficiência operacional e a segurança de sistemas em que a temperatura desempenha um papel importante.

No trabalho de De Souza Vicentin *et al* (2019) demonstram como foi estimado um fluxo de calor transiente na câmara de combustão de um foguete a partir de dados de temperatura experimentais através de métodos de problemas inversos aplicados a problemas de condução de calor. Já Xiong *et al* (2021) apresentaram um trabalho recente em que é aplicado o Método da Função Especificada para estimar a temperatura e o coeficiente de transferência de calor por convecção de um fluido.

Cattani *et al* (2023) estimaram o coeficiente de transferência de calor da evaporação de um fino filme líquido em um tubo capilar utilizando o COMSOL<sup>®</sup> para o cálculo das temperaturas numéricas do modelo, assim como utilizaram a regularização de Tikhonov, método de resolução de problemas inversos, para a estimação. Outro estudo utilizou o COMSOL<sup>®</sup> para estimar parâmetros de um modelo de baterias através do módulo de otimização e das ferramentas dispostas pelo LiveLink<sup>™</sup> em conjunto com o MATLAB<sup>®</sup> (RAJABLOO, 2015). Mostrando a atualidade desses métodos e ferramentas no presente cenário da engenharia.

O objetivo da pesquisa é realizar uma comparação entre dois métodos de estimação de fluxo de calor a partir de métodos de problemas inversos aplicados a um problema de condução de calor.

### Metodologia

A metodologia deste trabalho será dividida em três partes, a primeira abordando o experimento, a segunda a estimação do fluxo de calor por meio do Método da Função Especificada de Beck (1985) e a

terceira a estimação por meio do módulo de otimização do COMSOL<sup>®</sup>.

O experimento foi realizado por Carvalho (2005) e seus resultados experimentais foram utilizados para a comparação de métodos de estimação de fluxo de calor. A amostra de metal duro (propriedades térmicas apresentadas na Tabela 1) mede 12,7 x 12,7 x 4,7 mm e foi aquecida com um aquecedor elétrico de 10,4 x 10,4 mm, como pode ser visto na Figura 1.

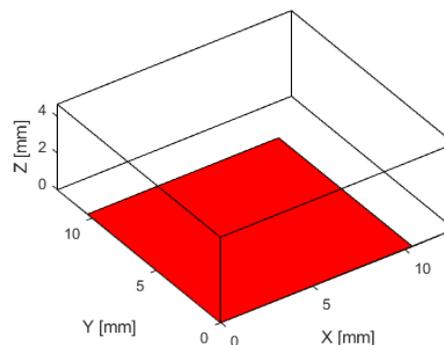


Figura 1 – Região de aquecimento ( $S_1$ )

Foi coletado o histórico de temperaturas em 4 pontos diferentes T1, T2, T3 e T4, como pode ser visto na Figura 2.

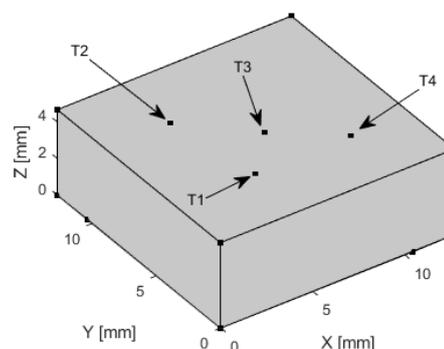


Figura 2 – Posição dos termopares

Condutividade térmica (k)	Massa específica (ρ)	Difusividade térmica (α)
43,1 [W/m.K]	14900 [kg/m³]	8.68810E-6 [J/kg.K]

Tabela 1 – Propriedades térmicas do metal duro

O problema direto foi resolvido pelo COMSOL® a partir da equação da difusão de calor, considerando a ausência de geração interna e propriedades térmicas constantes, sendo a seguinte expressão:

$$k \left( \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) = \rho c_p \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t}$$

As condições de contorno para o problema são uma imposição de fluxo transiente na região de aquecimento (S<sub>1</sub>) e uma convecção nas superfícies restantes (S<sub>2</sub>):

$$S_1: -k \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = q(t)$$

$$S_2: -k \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = h [T(x, y, z, t) - T_\infty]$$

Nas superfícies (S<sub>2</sub>) foi considerado uma convecção com coeficiente de transferência de calor de h = 20 W/m²K.

Finalmente, para a condição inicial:

$$T(x, y, z, 0) = T_0$$

A primeira análise será feita utilizando o Método da Função Especificada para estimar o fluxo de calor aplicado a partir do histórico de temperatura de um único ponto (T<sub>2</sub>), sendo implementado no MATLAB®. A seguinte equação mostra como será calculado o fluxo para cada passo temporal:

$$q = \frac{\left( \sum_{i=1}^r Y_{M+i-1} - T_{M+i-1} \right) \Phi_i}{\sum_{i=1}^r \Phi_i^2}$$

Sendo, Y as temperaturas experimentais, T as temperaturas estimadas a partir de um fluxo constante à r passos de tempo futuro, Φ a sensibilidade térmica do modelo em relação ao fluxo de calor.

Por se tratar de um problema tridimensional e utilizando uma aproximação linear, sendo as propriedades térmicas constantes em relação à variação de temperatura, a sensibilidade térmica do modelo em relação ao fluxo térmico aplicado será obtida através da seguinte expressão:

$$\Phi = \frac{\Delta T}{\Delta q}$$

Para sua obtenção, um modelo foi implementado no COMSOL® e, colocadas as condições iniciais e de contorno, uma pequena variação de fluxo foi aplicada a fim de obter uma segunda temperatura e assim a sensibilidade térmica. A partir do cálculo da sensibilidade, o fluxo de calor para cada passo de tempo pode ser calculado.

A segunda análise utiliza o Método dos Mínimos Quadrados e o algoritmo de otimização Levenberg-Marquardt (LM) do módulo de otimização do COMSOL®, minimizando uma função objetivo de mínimos quadrados que compara as temperaturas experimentais com as numéricas. Foram avaliadas duas estimações por esse segundo método, uma levando em consideração apenas um ponto de temperatura (T<sub>2</sub>) e outra considerando os quatro pontos.

Os cálculos foram realizados em um computador equipado com um processador i7 e 20 GB de memória RAM. As versões dos softwares utilizados foram MATLAB® R2023a e COMSOL Multiphysics 5.6.

## Resultados e discussão

A malha adotada foi do tipo tetraédrica, apresentando 934 elementos e uma qualidade mínima de 0,29 na assimetria dos elementos. Sua convergência foi obtida utilizando uma tolerância de 1% para um caso de análise estacionário.

Para a estimação por meio do Método da Função Especificada, o resultado utilizando quinze passos de tempo futuro (r = 15) foi o melhor dos valores testados. No entanto, nota-se que mesmo obtendo um bom resultado de forma, esse método não conseguiu uma estimação perfeita no quesito de valores, apresentando uma divergência notável.

A metodologia aplicada usando o algoritmo LM, apresentou menores médias de resíduos. No entanto, quando considerando apenas um sensor de temperatura, apresentou um custo computacional elevado em relação às alternativas.

A Figura 3 mostra os fluxos estimados pelos dois métodos em comparação com o fluxo experimental, medido por um transdutor de fluxo, sendo (n) a quantidade de termopares utilizados.

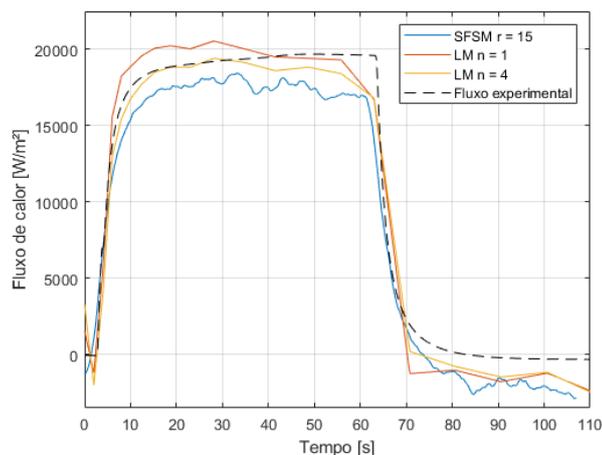


Figura 3 – Comparação entre os fluxos estimados

A Tabela 2, apresenta uma comparação geral dos resultados das estimações apresentadas anteriormente.

Analisando apenas os fluxos estimados exclusivamente no COMSOL®, o fluxo que utiliza apenas um sensor de temperatura apresenta uma média de resíduos menor que o fluxo que utiliza quatro sensores. No entanto, pode ser notado que o fluxo com  $n = 4$  acompanha melhor o fluxo medido experimentalmente e numa região de maior interesse, durante o aquecimento.

Método	Tempo de Simulação	Média dos resíduos	Desvio padrão
SFSM $r = 15$	1min49s	1733,05	920,43
LM $n = 1$	45min20s	319,41	1333,22
LM $n = 4$	8min27s	767,67	1006,96

Tabela 2 – Resultados dos diferentes métodos

### Conclusões

A partir das temperaturas experimentais é possível notar uma baixa diferença entre as temperaturas máxima e mínima. Sendo assim, a hipótese simplificadora de utilizar propriedades térmicas constantes é válida.

O Método da Função Especificada continua sendo bom no quesito de tempo, apresentando os menores tempos de simulação. No entanto, no quesito de precisão dos resultados, as estimações de fluxo de calor realizadas exclusivamente no COMSOL® apresentaram melhores resultados. O custo computacional dessas soluções é notavelmente mais elevado que o Método da Função Especificada, principalmente por estar sendo executada por um algoritmo de otimização, com certos critérios para a convergência.

Para próximos estudos seria interessante testar diferentes discretizações temporais para as soluções com otimização, pois existem regiões de mais importantes que outras para a estimação do fluxo de calor, como, por exemplo, a região de aquecimento. Assim, pode-se aumentar a precisão da estimação e diminuir os tempos de solução.

### Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Márcia e Ulisses, pelo incentivo e apoio durante toda a minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva pela oportunidade de iniciar no meio acadêmico e orientação dada ao decorrer deste trabalho.

À minha família, e em especial ao meu avô Inércio por ser um dos motivos de ter escolhido a engenharia.

Ao doutorando Fábio pela oportunidade de trabalharmos em projetos do LabTC.

Ao Prof. Dr. Rogério Fernandes Brito pelo apoio na realização dos trabalhos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro através da concessão de uma bolsa de iniciação científica.

### Referências

BECK, J.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. Wiley, 1985.

CARVALHO, Solidônio Rodrigues de. Cutting temperature estimation during a machining process. 2005. 151 f. Tese

(Doutorado em Engenharias) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.

Cattani, L., Bozzoli, F., Ayel, V., Romestant, C., & Bertin, Y. (2023). Experimental estimation of the local heat transfer coefficient for thin liquid film evaporation in a capillary tube. *Applied Thermal Engineering*, 219, 119482. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.119482>

De Souza Vicentin, I. C. F., Marchi, C. H., Foltran, A. C., Moro, D. F., Da Da Pereira Silva, N. D., Campos, M. C., Araki, L. K., & Diógenes, A. N. (2019). Theoretical and experimental heat transfer in solid propellant rocket engine. *Journal of Aerospace Technology and Management*. <https://doi.org/10.5028/jatm.v11.1066>

RAJABLOO, B.; DÉSILETS, M.; CHOQUETTE, Y. Parameter estimation of single particle model using COMSOL Multiphysics® and MATLAB® optimization toolbox. In: *Proceedings of the 2015 COMSOL Conference*, Boston, MA, USA. 2015.

Xiong, P., Qiu, Z., Lu, Q., Lu, T., Deng, J., Liu, Y., & Zhang, Y. (2021). Simultaneous estimation of fluid temperature and convective heat transfer coefficient by sequential function specification method. *Progress in Nuclear Energy*, 131(103588), 103588. <https://doi.org/10.1016/j.pnucenc.2020.103588>