ESPAÇOS-TEMPOS COM SIMETRIA ESPACIAL INTRÍNSECA II

Ygor de Oliveira Souza[1] (IC), Leandro Gustavo Gomes (PQ)[1]
[1]Universidade Federal de Itajubá

Palavras-chave: Gravitação. Astrofísica relativista. Espaço-tempo de Weyl. Soluções exatas.

Introdução

Este trabalho é melhor entendido como uma continuação de uma pesquisa anterior, junto ao Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes, acerca de espaços-tempos com simetria axial intrínseca, inicialmente estudados por Weyl e Levi-Civita nos anos iniciais da teoria da relatividade geral de Einstein. Usando o formalismo covariante, conhecido como (3+1), generalizamos os espaços-tempos de Weyl, sem impor condições de fronteira à priori. Em seguida, tentamos trazer uma generalização da solução de Weyl típica para o presente caso, entretanto, é mostrado que a solução de Weyl não só é a mais geral para os casos estáticos, mas como também a única que satisfaz a métrica axialmente simétrica generalizada, sob as implicações do caso estático. Inclusive, se permitirmos uma pequena generalização onde o fator de Hubble depende do espaço, isto é, $H = H(r,z)$, um universo totalmente anisotrópico (do ponto de vista de Kasner) é obtido, junto ao de Weyl. No entanto, é provado também que este universo é inconsistente e não existem soluções desse tipo para a métrica em questão, de modo que o resultado passa a ser mais geral do que se pensava.

Metodologia

O cronograma inicial deste trabalho foi previsto como:

a) Estudo dos espaços-tempos de Weyl e literatura relacionada;
b) Estudo dos modelos de matéria escura do universo com levantamento de literatura recente;
c) Confecção dos resultados em forma de manuscrito.

De fato, a literatura relacionada aos espaços-tempos de Weyl foi estudada, assim como um levantamento literário acerca de modelos para matéria escura foi feito. Após essa etapa, o grupo optou por estudar soluções no vácuo da métrica em questão (Weyl generalizada), pois parecia ser um caminho natural a seguir com o conhecimento obtido na pesquisa anterior a esta iniciação científica. Pode-se dizer, portanto, que o cronograma não somente foi realizado com esmero como também estendido, sendo que uma especialização para as aplicações das generalizações dos espaços-tempos de Weyl, envolvendo simetria axial intrínseca, foi feita e resultados novos começaram a ser obtidos. Com isso, esperamos resultados científicos nessa direção, com potencial de publicação nas melhores revistas da área.

Durante o período de I.C., a pesquisa se desenvolveu utilizando os seguintes recursos/metodologias:

a) Estudo da literatura da área atra'ves de livros-textos padrões e artigos científicos obtidos pela plataforma da CAPES;
b) Implementação computacional dos modelos com o "software" Mathematica, cuja licença é disponibilizada pela UNIFEI;
c) As reuniões seguiram de forma híbrida, tanto presencial no gabinete do professor, quanto de forma remota pela plataforma Google Meet.

Resultados e discussão

Neste trabalho estudaremos os espaços-tempos com simetria axial intrínseca e vorticidade nula que podem ser expressos como:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{-2\psi}[e^{2\lambda}(dr^2+dz^2)+r^2d\varphi^2],$$

onde $\phi = \phi(t,r,z)$, $\psi = \psi(t,r,z)$ e $\lambda = \lambda(r,t,z)$. O tensor de expansão é expresso como

$$\theta_i^j = \frac{e^{-\phi}}{2}h^{jk}\dot{h}_{ki} = e^{-\phi}\begin{bmatrix} \dot{\lambda}-\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}-\dot{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\psi} \end{bmatrix},$$

de onde H e Σ são escritos como

$$H = \frac{e^{-\phi}}{6}\,h^{jk}\dot{h}_{ki} = \frac{e^{-\phi}}{3}\,(2\dot{\lambda}-3\,\dot{\psi}),$$

$$\Sigma = k\bar{\Sigma}.$$

onde k é o sinal de $\Sigma = \left|\frac{\dot{\lambda}}{(2\dot{\lambda}-3\dot{\psi})}\right|$. Então, podemos construir a equação de fluxo de energia em termo dessas variáveis como

$$q_i = \begin{pmatrix} \partial_r\xi + \left(\xi + 2\dot{\psi}e^{-\phi}\right)\left(\psi_r - \frac{1}{r}\right) \\ 0 \\ \partial_z\xi + \left(\xi + 2\dot{\psi}e^{-\phi}\right)\psi_z \end{pmatrix},$$

com $\xi = e^{-\phi}(\dot{\lambda} - 2\dot{\psi})$. Para transcrever as equações nas nossas variáveis, escrevemos $e^{-\phi}\dot{\lambda} = 3\bar{\Sigma}H$ e $e^{-\phi}\dot{\psi} = (2\bar{\Sigma} - 1)H$, de modo que identificamos $\xi = (2 - \Sigma)H$ e a equação do fluxo de energia se lê como

$$q_i = \begin{pmatrix} \partial_r \xi + \left(\xi + 2\dot{\psi}e^{-\phi}\right)\left(\psi_r - \frac{1}{r}\right) \\ 0 \\ \partial_z \xi + \left(\xi + 2\dot{\psi}e^{-\phi}\right)\psi_z \end{pmatrix}.$$

Ainda, no vácuo, as equações de Einstein se tornam, em nossas variáveis,

$$3(1 - \Sigma^2)H^2 = -\frac{1}{2}\bar{R};$$

$$3e^{-\phi}\dot{H} + 3(1 + 2\Sigma^2) = e^{-\phi}\overline{\nabla^2}e^{\phi};$$

$$e^{-\phi}H\frac{\partial}{\partial t}\Sigma^i_k = -\frac{1}{3}S^l_l\Sigma^i_k + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(S^i_k - \frac{1}{3}S^l_l\delta^i_k\right);$$

$$e^{-\phi}H\frac{\partial}{\partial t}\Sigma = -\frac{1}{3}S^l_l\Sigma + \frac{1}{\sqrt{6}}S\cos(b_1);$$

$$e^{-\phi}H\Sigma\cos(3\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{6}}S\big(\cos(b_1)\sin(3\alpha) + \sqrt{3}\cos(b_2)\big) + \frac{1}{3}S^l_l,$$

onde b_1 e b_2 podem ser entedidos como ângulos de separação entre S^i_k e Σ^i_k e α diz respeito ao ângulo polar na representação de Kasner.

Uma possível solução para a métrica geral é trazer as implicações da solução de Weyl em nossas variáveis e testar sua consistência, ou seja, testar as equações de Einstein sob as seguintes condições:

$$\begin{cases} \psi = \phi; \\ \bar{R} = 0; \\ e^{-\phi}\overline{\nabla^2}e^{\phi} = 0. \end{cases}$$

Olhando para a Friedmann generalizada (primeira equação de Einstein na ordem apresentada), temos dois casos:

<u>O caso $H = 0$</u>

Esse caso se reduz a solução de Weyl pois, de acordo com a definição de H, nós temos $\dot{\phi} \cong \dot{\lambda}$ e, para $\bar{\Sigma}$ ser finito, devemos pedir $\dot{\lambda} = 0$, que implica $\dot{\phi} = 0$, de modo que as funções associadas aos potenciais são estáticas, reduzindo à métrica de Weyl.

<u>O caso $H \neq 0$</u>

As equações da anisotropia e sua magnitude, assim como o ângulo polar, são identicamente nulas, o que está de acordo com nossa métrica. Ao observar a equação de Friedmann, concluímos que $\Sigma = 1$. Usando este fato na equação do fluxo de energia, podemos escrever

$$\frac{\partial H}{\partial r} + 3H\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} + 3H\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 0,$$

onde $\bar{\phi} = \phi - \ln r$. Daqui, resolvemos para $H(r,z)$ como

$$H = f(t)e^{-3\phi}r.$$

Levando esta condição na definição da constante de Hubble e na equação de Raychaudhuri, concluímos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = fe^{-2\phi} + \frac{\dot{f}}{f},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 3fe^{-2\phi}r + \frac{\dot{f}}{f}.$$

Se pedirmos a consistência entre as derivadsa temporais e espaciais de λ, isto é

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial r},$$

teremos

$$\begin{cases} 2r\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t}\right) = 3fe^{-2\phi} - 6fe^{-2\phi}r\frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ 2r\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t}\right) = -6fe^{-2\phi}r\frac{\partial \phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Usando a expressão para $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ nas equações acima, concluímos

$$\begin{cases} 4r^2\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2\right] = 3 - 8r\frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ -8fe^{-2\phi}r^2\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial r} = -8fe^{-2\phi}\frac{\partial \phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Se ϕ depender ou não da variável z, concluímos $\phi \cong \ln r$. No entanto, essa condição é inconsistente com $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r}$ pois

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} = fe^{-2\phi} - 2fe^{-2\phi}r\frac{2\phi}{\partial r} = 0,$$

forçando $f = 0$. Mas isso é uma contradição, já que estamos no caso $H \neq 0$. Logo, provamos o seguinte teorema:

<u>Teorema</u>

Sob as condições da solução típica de Weyl, a única solução exata é a métrica estática de Weyl.

Conclusões

A investigação dos espaços-tempos de Weyl, usando o formalismo covariante (3+1), levou a formulações inéditas na literatura, como uma simplificação das equações de Einstein aplicadas aos espaços-tempos de Weyl generalizados, em particular, destacando o papel das anisotropias presentes. Feita a generalização, uma primeira questão válida é se perguntar da aplicabilidade de condições anteriores à generalização. No presente caso, entendemos essa pergunta ao tentar usar as mesmas implicações da solução de Weyl na métrica generalizada. Por fim, provamos que toda outra solução, usando as mesmas implicações da solução de Weyl (escalar de Ricci intrínseco e laplaciano de ϕ nulos) é inconsistente e, mesmo no caso generalizado, somos forçados a adotar potenciais que não dependem do tempo. Desse modo, pode-se dizer que o resultado do trabalho lembra o teorema de Birkhoff, mas não é tão forte quanto este, pois as hipóteses pedidas não são tão gerais quanto neste teorema. De fato, é mostrado que a única solução axialmente simétrica, sob as condições de Weyl, é a métrica de Weyl, e toda outra generalização é inconsistente.

Esse trabalho também se mostra como um ponto de começo para investigações futuras, ainda sobre soluções exatas, pois prova a inconsistência de uma possível solução, correta no caso não generalizado.

Agradecimentos

À minha família e à minha namorada Ana, agradeço pelo amor, companheirismo, paciência, apoio e incentivos constantes. Ao meu orientador Leandro Gomes pela amizade, dedicação e ensinamentos, tanto como aluno quanto como pesquisador. À UNIFEI, Universidade Federal de Itajubá e à FAPEMIG, órgão responsável pelo fomento à minha pesquisa.

Referências

[1] Belinskii, V.A. ; Khalatnikov, I.M. ; Lifshitz, E.M.: Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology. In: Advances in Physics 19 (1970), Nr. 80, S. 525-573.Disponível em: https://doi.org/10.1080/00018737000101171. Acesso em 06/09/2023.
[2] Binney, James ; Tremaine, Scott: Galactic Dynamics. Princeton University Press, 2008. – ISBN 0691130272
[3] Bittencourt, Eduardo ; Gomes, Leandro G. ; Klippert, Renato: Bianchi-I cosmology from causal thermodynamics. Em: Classical and Quantum Gravity 34 (2017), feb, Nr. 4, S. 045010. Disponível em: https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa5994. Acesso em 06/09/2023.
[4] Bizarria, Bruno B. ; Silva, Gabriel A. S. ; Gomes, Leandro G. ; Clavijo, William O.: The oscillatory anisotropy in the spatially flat cosmological models. Em: Annals of Physics 432 (2021), S. 168571. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491621001779. Acesso em Acesso em 06/09/2023.
[5] Curzon, H. E. J.: Cylindrical Solutions of Einstein's Gravitation Equations. Em: Proceedings of the London Mathematical Society s2-23 (1925), Nr. 1, S. 477–480. Disponível em: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-23.1.477. Acesso em 06/09/2023.
[6] Dias, Fabio S. ; Santos, Grasiele B. ; Gomes, Leandro G. ; Mello, Luis F.: The power-law dependence between the matter-radiation and Hubble anisotropies. In: International Journal of Modern Physics D 31 (2022), 05, Nr. 07, S. 2250049
[7] Ellis, George F. R. ; Maartens, Roy ; MacCallum, Malcolm A. H.: Relativistic Cosmology. Cambridge University Press, 2012. – ISBN 9781139014403
[8] Gautreau, Ronald ; Hoffman, Richard B.: Exact solutions of the Einstein vacuum field equations in Weyl co-ordinates. In: Il Nuovo Cimento B (1965-1970) 61 (1969), S. 411–424.
[9] Gomes, Leandro G.: The nonlinear patterns of the cosmic anisotropy: the spatially flat perfect fluid universes. In: Classical and Quantum Gravity 39 (2021), dec, Nr. 2, S. 027001. Disponível em: https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac3ae1. Acesso em 06/09/2023.
[10] Griffiths, Jerry B. ; Podolský, Jiří: Exact Space-Times in Einstein's General Relativity. Cambridge University Press, 2009 (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
[11] Hoffman, Kenneth ; Kunze, Ray: Linear Algebra. Pearson, 1971. – ISBN 0135367972
[12] Magni, Stefano: Backreaction and the Covariant Formalism of General Relativity. (2012), 02.
[13] Quevedo, Hernando: General static axisymmetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates. In: Phys. Rev. D 39 (1989), May, S. 2904–2911. – URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.39.2904. Acesso em 06/09/2023.
[14] Ramos, Javier F. ; González, Guillermo A.: Solución de las ecuaciones de Einstein para espacio-tiempos de Weyl en coordenadas esferoidales generalizadas. In: Revista integración, temas de matemáticas 18 (2000), Nr. 1, S. 1–8. Disponível em: https://revistas.uis.edu.co/index. Acesso em 06/09/2023.
php/revistaintegracion/article/view/829
[15] Zipoy, David M.: Topology of Some Spheroidal Metrics. In: Journal of Mathematical Physics 7 (1966), Nr. 6, S. 1137–1143. Disponível em: https://doi.org/10.1063/1.1705005. Acesso em 06/09/2023.