MODELOS ANÁLOGOS EM ELETRODINÂMICA NÃO LINEAR

Arthur Miguel Cunha e Silva[1] (IC), Eduardo Henrique da Silva Bittencourt (PQ)[1]
[1]*Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)*

Palavras-chave: Eletrodinâmica não linear. Métrica efetiva. Método de Hadamard.

Introdução

O desenvolvimento desse projeto tem como objetivo estudar a eletrodinâmica de Maxwell dentro de um meio material dielétrico e, posteriormente, obter a métrica óptica associada no limite da óptica geométrica (NOVELLO & GOULART, 2010).

Para isso, começamos por analisar os tensores de Maxwell em um espaço com 3+1 dimensões, encontrando suas equações de movimento correspondentes. De modo a colocá-las numa forma mais familiar, introduzimos uma classe de observadores que decompõe o espaço quadri-dimensional em 3 dimensões espaciais, através do tensor de projeção, e do próprio campo de observadores, que nos fornece a componente temporal das equações.

No caso de meios materiais, existem tensores especiais que caracterizam a resposta do meio a campos externos, deixando a análise da óptica geométrica um pouco mais complicada, uma vez que a luz não seguirá mais linhas retas no espaço plano. Aplicando o chamado método de Hadamard nas equações de Maxwell no interior do dielétrico, obteremos exatamente a chamada métrica óptica efetiva (FONSECA, 2018) e (PRADO, 2022).

Metodologia

Primeiramente vamos introduzir o tensor de Maxwell como sendo:

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Para calcular seu correspondente dual, vamos utilizar a relação dada por:

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{2}$$

Com a relação acima, vamos obter o tensor dual descrito por:

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

A partir dos tensores (1) e (3), é válido ressaltar também que as unidades utilizadas serão do tipo Lorentz-Heaviside, ou seja, com $c=\mu=\epsilon=1$. Agora vamos encontrar as equações de Maxwell cuja fonte é dada por:

$$j^{\mu}=[\rho,\vec{j}] \tag{4}$$

sendo ρ a densidade de carga elétrica e $\vec{j}$ o vetor de corrente.

Para encontrar as equações de Maxwell, basta tomar a divergência dos tensores de Maxwell, como segue:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}=j^{\mu} \tag{5}$$

$$\partial_\nu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu}=0 \tag{6}$$

Explicitamente, temos que para cada índice ν será realizada uma derivada parcial da componente do tensor com respeito às coordenadas e o tempo. Por exemplo:

$$\begin{aligned} &\mu=0 \\ &\partial_\nu F^{0\nu}=j^0 \\ &\partial_0 F^{00}+\partial_1 F^{01}+\partial_2 F^{02}+\partial_3 F^{03}=\rho \\ &0+\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\rho \\ &\nabla\cdot\vec{E}=\rho \end{aligned} \tag{7}$$

Note que a equação (7) é a Lei de Gauss do eletromagnetismo. Utilizando o mesmo processo anterior para calcular as componentes $\mu=1,2,3$ e depois somando os resultados, vamos obter a Lei de Ampère-Maxwell (FONSECA, 2018) e (PRADO, 2022):

$$\nabla \times \vec{B} = \left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) \tag{8}$$

Para o tensor dual, será realizado também o mesmo processo e, ao final dos cálculos, encontraremos a lei do monopólo magnético e a Lei de Faraday, como apresentadas abaixo, respectivamente:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \tag{10}$$

Por fim, introduzimos o método de Hadamard, que será usado para estudar a evolução de uma frente de onda de campos contínuos, que no entanto, podem ter derivadas descontínuas. Seja $\Sigma\left(x^{\mu}\right)$ uma superfície de descontinuidade definindo duas regiões disjuntas no espaço-tempo. Tomando f^1 e f^2 de uma função f em cada domínio disjunta de Σ, então a descontinuidade de Hadamard da função f é:

$$\left[f(x) \right]\Big|_{\Sigma} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(f^1(x+\epsilon) - f^2(x-\epsilon) \right) \tag{11}$$

Consideremos agora um deslocamento entre os pontos das regiões 1 e 2 em direção a Σ. Hadamard mostrou que os diferenciais desses pontos existem e são contínuos, ou seja, a descontinuidade das derivadas de f deve ser um objeto ortogonal à superfície Σ. Portanto, existe um escalar diferente de zero, tal que$\left[f_{,\alpha} \right]\Big|_{\Sigma} = X(x) \Sigma_{\alpha}$.

No caso do campo eletromagnético, as condições de Hadamard serão dadas por$\left[F_{\mu\nu} \right]\Big|_{\Sigma} = 0$ $\left[F_{\mu\nu,\lambda} \right]\Big|_{\Sigma} = f_{\mu\nu} k_{\lambda}$. Em que$k_{\lambda}$é o vetor normal a superfície e $f_{\mu\nu}$ é a intensidade da descontinuidade do campo. Em particular, no caso da eletrodinâmica no vácuo, tomando a descontinuidade da equação (5), vamos chegar ao resultado de que a propagação das descontinuidades do campo eletromagnético se dá como geodésicas nulas no espaço de Minkowski.

$$k_{\mu,\lambda} k^{\lambda} = 0 \tag{12}$$

Resultados e discussão

Para encontrarmos uma métrica efetiva, será necessário realizar uma perturbação em um meio material na presença de um campo eletromagnético.

O campo eletromagnético no meio material será representados pelos tensores antissimétricos $F_{\mu\nu}$ e $P_{\mu\nu}$, usando intensidades do campo elétrico e campo magnético (E_{μ}, H_{μ}) e deslocamento elétrico e indução magnética (D_{μ}, B_{μ}).

Quando introduzimos um campo de observadores, representado por um quadrivetor v_{μ}, os tensores de Maxwell podem ser decompostos tensorialmente em termos dos campos vetoriais da seguinte forma:

$$F_{\mu\nu} = E_{\mu} v_{\nu} - E_{\nu} v_{\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} v_{\alpha} B_{\beta} \tag{13}$$

$$P_{\mu\nu} = D_{\mu} v_{\nu} - D_{\nu} v_{\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} v_{\alpha} H_{\beta} \tag{14}$$

Os vetores dados pelo campo eletromagnético são tipo-espaço. Sendo assim, temos a seguinte estrutura:

$$E^{\alpha} E_{\alpha} = -E^2 \tag{15}$$

$$H^{\alpha} H_{\alpha} = -H^2 \tag{16}$$

Para que tenhamos um sistema fechado de equações é preciso fornecer relações entre os campos. Para isso, introduzimos as chamadas relações constitutivas do meio que são expressas na forma:

$$D_{\alpha} = \epsilon_{\beta}{}^{\alpha}(E,H) E_{\beta} \tag{17}$$

$$B_{\alpha} = \epsilon_{\beta}{}^{\alpha}(E,H) H_{\beta} \tag{18}$$

Para os fins desse estudo será tomado um meio dielétrico simples em que a permeabilidade magnética seja constante e igual aμ_0e a permissividade elétrica dependa somente do módulo do campo elétrico $\epsilon = \epsilon(E)$.

Por fim, as equações de Maxwell no interior do dielétrico tomam a seguinte forma:

$$\partial_{\nu} P^{\mu\nu} = 0 \tag{19}$$

$$\partial_{\nu} \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0 \tag{20}$$

Em termos dos campos, essas equações podem ser escritas como:

$$D^{\mu}{}_{,\nu} v^{\nu} - D^{\nu}{}_{,\nu} v^{\mu} + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} v_{\alpha} H_{\beta,\nu} = 0 \tag{21}$$

$$B^{\mu}{}_{,\nu}v^{\nu}-B^{\nu}{}_{,\nu}v^{\mu}+\eta^{\mu\nu\alpha\beta}v_{\alpha}E_{\beta,\nu}=0 \qquad (22)$$

Em termos do observador v^{μ} podemos decompor estas equações numa componente temporal e outra espacial utilizando o tensor de projeção no espaço tridimensional ortogonal a v^{μ} dado por $h_{\mu\nu}=\hat{g}^{\mu\nu}-v_{\mu}v_{\nu}$. São elas:

$$D_{\phi,\nu}v^{\nu}+\eta_{\phi}{}^{\nu\alpha\beta}v_{\alpha}H_{\beta,\nu}=0 \qquad (23)$$
$$B_{\phi,\nu}v^{\nu}-\eta_{\phi}{}^{\nu\alpha\beta}v_{\alpha}E_{\beta,\nu}=0 \qquad (24)$$

Com isso podemos utilizar as relações constitutivas do meio dadas por (17) e (18) e dessa forma vamos obter:

$$(\epsilon E_{\phi})_{,\nu}=\epsilon_{,\nu}E_{\phi}+(E_{\phi,\nu})\epsilon \qquad (25)$$
$$B_{\phi,\nu}=(\mu_0 H_{\phi})_{,\nu} \qquad (26)$$

Realizando as derivadas e utilizando os resultados das equações (25) e (26) vamos obter enfim as projeções dadas por:

$$\epsilon E^{\nu}{}_{,\nu}-\frac{\epsilon' E^{\mu}E^{\nu}}{E}E_{\mu,\nu}=0 \qquad (27)$$
$$\mu_0 H^{\nu}{}_{,\nu}=0 \qquad (28)$$
$$\epsilon \dot{E}^{\nu}{}_{,\nu}-\frac{\epsilon' E^{\phi}E^{\mu}v^{\nu}}{E}E_{\mu,\nu}+\eta^{\phi\nu\alpha\beta}v_{\alpha}H_{\beta,\nu}=0 \qquad (29)$$
$$\mu_0 \dot{H}^{\phi}-\eta^{\phi\nu\alpha\beta}v_{\alpha}E_{\beta,\nu}=0 \qquad (30)$$

Agora vamos tomar o método de Hadamard nas equações (27), (28), (29) e (30) para uma superfícieΣ, tal que:

$$[E_{\mu,\lambda}]_{\Sigma}=e_{\mu}k_{\lambda} \qquad (31)$$
$$[H_{\mu,\lambda}]_{\Sigma}=h_{\mu}k_{\lambda} \qquad (32)$$

sendo que $k_{\lambda}=\partial_{\nu}\Sigma$. Dessa forma temos para a equação (27):

$$[\epsilon E^{\nu}{}_{,\nu}-\frac{\epsilon' E^{\mu}E^{\nu}}{E}E_{\mu,\nu}]_{\Sigma}=0\rightarrow$$
$$[\epsilon E^{\nu}{}_{,\nu}]_{\Sigma}-[\frac{\epsilon' E^{\mu}E^{\nu}}{E}E_{\mu,\nu}]_{\Sigma}=0\rightarrow$$
$$([\epsilon]_{\Sigma}E^{\nu}{}_{,\nu}+\epsilon[E^{\nu}{}_{,\nu}]_{\Sigma})$$
$$-([\frac{\epsilon' E^{\mu}E^{\nu}}{E}]_{\Sigma}E_{\mu,\nu}+\frac{\epsilon' E^{\mu}E^{\nu}}{E}[E_{\mu,\nu}]_{\Sigma})=0\rightarrow$$
$$(\epsilon[E^{\nu}{}_{,\nu}]_{\Sigma})-(\frac{\epsilon' E^{\mu}E^{\nu}}{E}[E_{\mu,\nu}]_{\Sigma})=0\rightarrow$$
$$\epsilon e_{\nu}k_{\nu}-\frac{\epsilon' E^{\mu}E^{\nu}}{E}e_{\mu}k_{\nu}=0\rightarrow$$
$$\epsilon k^{\nu}e_{\nu}-\frac{\epsilon'}{E}E^{\mu}e_{\mu}k^{\nu}E_{\nu}=0$$

Utilizando o mesmo processo para as equações (28), (29) e (30) temos enfim quatro equações (FONSECA, 2018) e (PRADO, 2022):

$$\epsilon k^{\mu}e_{\mu}-\frac{\epsilon'}{E}E^{\mu}e_{\mu}k^{\nu}E_{\nu}=0 \qquad (33)$$
$$\mu_0 k^{\nu}h_{\nu}=0 \qquad (34)$$
$$\epsilon k^{\nu}v_{\nu}e^{\phi}-\frac{\epsilon'}{E}E^{\mu}e_{\mu}k^{\nu}v_{\nu}E^{\phi}+\eta^{\phi\nu\alpha\beta}v_{\alpha}h_{\beta}k_{\nu}=0 \qquad (35)$$
$$\mu_0 k^{\nu}v_{\nu}h^{\phi}-\eta^{\phi\nu\alpha\beta}v_{\alpha}e_{\beta}k_{\nu}=0 \qquad (36)$$

Veja queé o próprio vetor de propagação da onda no meio e aindaa derivada decom respeito ao campo elétrico. Com isso substituindo a equação (36) em (35) vamos obter:

$$\epsilon k^{\alpha}v_{\alpha}e^{\lambda}-\frac{\epsilon'}{E}E^{\beta}e_{\beta}k^{\alpha}v_{\alpha}E^{\lambda}$$
$$\frac{e^{\lambda}}{\mu_0 k^{\alpha}v_{\alpha}}(k^{\mu}k_{\mu}-(k^{\nu}v_{\nu})^2)-\frac{k^{\alpha}e_{\alpha}}{\mu_0 k^{\beta}v_{\beta}}k^{\lambda}=0 \qquad (37)$$

Vale ressaltar que na equação (37) é utilizado uma identidade para eliminar os's da equação, que é definida por:

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\sigma}\eta_{abcd}=\begin{pmatrix}\delta^{\alpha}_{a} & \delta^{\alpha}_{b} & \delta^{\alpha}_{c} & \delta^{\alpha}_{d}\\ \delta^{\beta}_{a} & \delta^{\beta}_{b} & \delta^{\beta}_{c} & \delta^{\beta}_{d}\\ \delta^{\gamma}_{a} & \delta^{\gamma}_{b} & \delta^{\gamma}_{c} & \delta^{\gamma}_{d}\\ \delta^{\sigma}_{a} & \delta^{\sigma}_{b} & \delta^{\sigma}_{c} & \delta^{\sigma}_{d}\end{pmatrix} \qquad (38)$$

Enfim multiplicando a equação por, é definida então a relação de dispersão do meio:

$$(\eta^{\mu\nu}+v^{\mu}v^{\nu}(\mu_0\epsilon-1+\mu_0\epsilon' E)-\frac{\epsilon'}{\epsilon E}E^{\mu}E^{\nu})k_{\mu}k_{\nu}=0 \qquad (39)$$

Veja que a equação (39) não condiz com uma superfície da teoria linear, ou seja, têm-se uma estrutura causal característica determinada pelo meio, isto é, atrelada as propriedades do material em que as ondas percorrem. Dessa forma é possível interpretar como uma geometria Riemanniana em que:

$$\hat{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0 \tag{40}$$

ondeé a própria métrica óptica efetiva do meio material. Comparando a equação (40) com a (39) vemos efetivamente que a métrica é definida por (NOVELLO & GOULART, 2010):

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + v^\mu v^\nu \left(\mu_0 \epsilon - 1 + \mu_0 \epsilon' E\right) - \frac{\epsilon'}{\epsilon E} E^\mu E^\nu \tag{41}$$

Conclusões

Estudamos o formalismo tensorial aplicado ao eletromagnetismo de Maxwell, tanto no vazio quanto no interior de um meio dielétrico, deduzindo a partir dai as equações de movimento em ambos os casos.

Utilizando o método de Hadamard analisamos as descontinuidades do campo eletromagnético no interior de um dielétrico não linear, demonstrando que surge uma métrica óptica que não coincide com a métrica de Minkowski e, portanto, as ondas se propagam seguindo geodésicas em uma métrica curva.

Futuramente, pretendemos estudar este formalismo da eletrodinâmica em outros contextos, por exemplo, em dimensões reduzidas, além de modelos análogos da gravitação.

Agradecimentos

A.M.C.S. agradece a Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) pelo apoio financeiro (PIBIC-UNIFEI) e oportunidades que me proporcionaram ao longo deste percurso tornando possível a realização dessa pesquisa. E.B. agradece ao CNPq pelo apoio financeiro (bolsa nº . 305217/2022-4).

Referências

NOVELLO, M.; GOULART, E. Eletrodinâmica não linear: Causalidade e efeitos cosmológicos. 1ªEdição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

PRADO, W.P. Uma busca por um modelo análogo para a métrica de Alcubierre. Trabalho de conclusão de curso. UNIFEI, Itajubá-MG 2022.

FONSECA, E.B. Eletrodinâmica não linear. Trabalho de conclusão de curso. UNIFEI, Itajubá-MG 2018.