Uma revisão bibliográfica da relatividade restrita e os fundamentos matemáticos da relatividade geral

Gabriel de Almeida Porto (IC)[1], Eduardo Henrique Silva Bittencourt (PQ)[1]
[1] *Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)*

Palavras - Chave: Geometria diferencial. Relatividade Geral. Relatividade Restrita.

Introdução

Neste trabalho foi estudado dentro do campo da física teórica a teoria da relatividade, que busca entender como os eventos e as leis da física são vistos por diferentes observadores em alta velocidade e como eles se relacionam. A teoria da relatividade pode ser dividida em duas partes: a relatividade restrita, que modifica a mecânica Newtoniana (construída a partir das leis de Newton) e mantém o Eletromagnetismo (construído a partir das equações de Maxwell) e como as equações que descrevem os fenômenos dessas áreas se comportam quando vistas por referenciais inerciais; a relatividade geral, que reinterpreta a força gravitacional como uma estrutura geométrica do espaço-tempo, pois a relatividade restrita postula uma velocidade limite para propagação de interações enquanto a interação gravitacional Newtoniana acontece de maneira instantânea, portanto, incompatível com a teoria da relatividade restrita.

Foi abordado neste trabalho toda teoria da relatividade restrita, que se iniciou com o estudo das transformações de Galileu, a problemática da Mecânica Newtoniana com o Eletromagnetismo e as transformações de Lorentz que unificam essas duas áreas bem como suas consequências. Na relatividade geral foi dada atenção apenas para as ferramentas matemáticas usadas para construir a teoria que começa pelo estudo do espaço Euclidiano, sistemas de coordenadas, tensores, variedades e a equação da geodésica. Posteriormente, iremos estudar as equações de movimento e algumas de suas soluções mais importantes.

Metodologia

Foi estudado no contexto da relatividade restrita as transformações de Galileu com base no princípio da relatividade que diz que as leis da física devem ser as mesmas para quaisquer referenciais inerciais. Dessa maneira, este conjunto de transformações chamado **Grupo de Galileu** torna a Mecânica Newtoniana (fundamentada nas três leis de Newton) invariante (Mario Novello 2010). São elas,

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= \mathcal{R}\vec{R} - \vec{V}t + \vec{d}, \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\mathcal{R}$ é uma matriz de rotação, $\vec{R}$ é o vetor posição, $\vec{V}$ é a velocidade relativa entre os observadores e $\vec{d}$ a distância inicial entre os observadores

Com o advento do Eletromagnetismo, surge uma problemática referente à velocidade de propagação da luz, pois dados os campos elétrico ($\vec{E}$) e magnético ($\vec{B}$), quando expressos no vácuo satisfazem uma equação diferencial de onda. Logo, é adicionado na relatividade restrita um novo postulado que diz que a velocidade da luz deve ser a mesma para quaisquer referenciais inerciais. A adição deste postulado levou a um novo conjunto de transformações, na qual leva o nome de transformações de Lorentz, dadas pela equação (Alonso 1972)

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}X\right) \\ X' = \gamma(X - Vt) \\ Y' = Y \\ Z' = Z \end{cases}, \tag{2}$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ é chamado fator de Lorentz. O conjunto destas transformações constitui um novo grupo, chamado **Grupo de Lorentz**, que respeita a invariância da velocidade da luz e assim mantém a forma das equações de Maxwell para quaisquer referenciais inerciais.

Uma forma mais elegante de se escrever a relatividade restrita foi formalizada pelo matemático Hermann Minkowski (1864-1909), que percebeu que a relatividade restrita poderia ser melhor expressada se incorporarmos o tempo como uma dimensão, ao invés de um parâmetro de evolução, uma vez que pelas transformações de Lorentz existe uma dependência mútua entre espaço e tempo. Assim, é formulado o **Espaço-Tempo de Minkowski** denotado por $\mathcal{M}^4$, que é um espaço vetorial real quadridimensional, onde está definido o produto interno Lorentziano que é usado para definir uma métrica (maneira com que se mede distâncias):

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{3}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico representado por uma matriz diagonal de assinatura[1] $(+,-,-,-)$.

Como consequência da assinatura da métrica podemos classificar as distâncias medidas em três tipos:

1. **Luz**: quando a componente espacial é igual a componente temporal de modo que $c^2dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Então, o evento ocorre sobre a superfície de um cone, denominado cone de luz. Se $t > 0$, o evento está no futuro e, se $t < 0$, o evento está no passado.

2. **Tempo**: quando a componente temporal é maior que a componente espacial, isto é, $c^2dt^2 > dx^2 + dy^2 + dz^2$. Neste caso, o evento ocorre no interior do cone.

3. **Espaço**: quando a componente espacial é maior que a componente temporal ($c^2dt^2 < dx^2 + dy^2 + dz^2$), o evento ocorre no exterior do cone.

Foram estudados também alguns elementos de geometria diferencial de curvas e superfícies de modo a ganhar uma certa intuição com o conceito de variedade diferencial, indispensável para o estudo da teoria da relatividade geral (James Foster 2006).

Para isso, começamos por considerar, no espaço Euclidiano, um sistema de coordenadas padrão cartesiano (x, y, z) e a partir dele construir outros sistemas de coordenadas, agora não-cartesianos (u, v, w). Assim, é possível escrever a relação entre os sistemas de coordenadas na seguinte forma:

$$\vec{r} = x(u,v,w)\vec{i} + y(u,v,w)\vec{j} + z(u,v,w)\vec{k}. \tag{4}$$

Quando dois parâmetros são fixados, tomados como constantes, a equação descreve uma curva parametrizada. Se fixado um parâmetro a equação descreve uma superfície parametrizada. Se as funções forem regulares, é possível também determinar a transformação inversa como sendo

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \quad w = w(x,y,z). \tag{5}$$

Assim, quando passamos de um sistema para outro, se torna necessário também definir uma nova base de vetores. Para o caso da equação (4), definimos uma base derivando cada componente com respeito às novas coordenadas, obtendo então a chamada base natural

$$\vec{e}_u \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}. \tag{6}$$

Já a base dual é definida tomando o gradiente em cada coordenada, de tal maneira que

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} u &= \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},\\
\vec{\nabla} v &= \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k},\\
\vec{\nabla} w &= \frac{\partial w}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Com os vetores destas bases é possível escrever qualquer vetor do espaço vetorial como combinação linear deles, sendo que a escrita pode se feita de maneira sucinta, utilizando a **Notação de Einstein**, omitindo o símbolo de somatório da forma

$$\vec{\lambda} = \lambda^1\vec{e_1} + \lambda^2\vec{e_2} + \lambda^3\vec{e_3} = \lambda^i\vec{e}_i, \tag{8}$$

e

$$\vec{\mu} = \mu_1\vec{e^1} + \mu_2\vec{e^2} + \mu_3\vec{e^3} = \mu_j\vec{e^j}. \tag{9}$$

Uma vez apresentados os elementos básicos de geometria diferencial, iremos agora generalizá-los para o contexto de variedades.

Resultados e discussão

Uma variedade de dimensão N, que denotaremos por M, é uma generalização do conceito de superfícies, onde o espaço é suave, contínuo e localmente plano, isto é, localmente é um espaço Euclidiano de dimensão N chamado de $\mathbb{R}^n$. Assim, podemos pegar um ponto $P \in M$ e levá-lo ao $\mathbb{R}^n$ de tal forma que a operação inversa também seja possível. Nesse sentido, o espaço Euclidiano pode ser visto como um plano, porém uma variedade pode caracterizar espaços mais gerais como, por exemplo, uma esfera (James Foster 2006).

De maneira breve, podemos definir um tensor como sendo uma coleção de coeficientes $\tau^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}$ que para cada ponto da variedade se transforma sob transformações gerais de coordenadas da seguinte forma

$$\tau^{a'_1\ldots a'_r}_{b'_1\ldots b'_s} = A^{a'_1}_{c_1}\ldots A^{a'_r}_{c_r}A^{d_1}_{b'_1}\ldots A^{d_s}_{b'_s}\tau^{c_1\ldots c_r}_{d_1\ldots d_s}, \tag{10}$$

onde $A^{a'_1}_{c_1}$ representa uma matriz Jacobiana e $A^{d_1}_{b'_1}$ indica sua inversa. Se em cada ponto de uma região V da variedade M for possível definir um tensor do tipo (r, s), temos então um **campo tensorial** em V. Se as componentes deste campo forem funções com boas propriedades de diferenciabilidade, dizemos que temos um *Campo Tensorial Diferenciável*.

Em particular, o **Campo Tensorial Métrico**, denotado por g_{ab}, tem as seguintes propriedades: é simétrico ($g_{ab} = g_{ba}$) e não-singular, ou seja, possui inversa g^{ab}. Uma de suas utilidades é subir e descer índices dos demais campos tensoriais em M.

[1] A assinatura de uma matriz é a coleção de sinais de seus autovalores.

Definido o que é uma variedade e campos tensoriais sobre ela, vamos então definir a trajetória de partículas nesse ambiente. No espaço Euclidiano o menor caminho entre dois pontos será sempre uma reta. Porém, se partícula estiver percorrendo uma superfície curva, a menor trajetória poderá não ser uma reta, e para que seja definida a menor curva que passa por dados dois pontos é usado o conceito de *retidão* (o quão reto é a curva). Esta curva leva o nome de **geodésica**.

Se duas partículas inicialmente paralelas entre si a uma distância d começam a traçar uma trajetória e durante a trajetória a distância relativa entre elas não for constante, é definida uma aceleração e neste caso temos um **desvio da geodésica**. Portanto, as partículas estão em um espaço curvo.

A equação que descreve uma geodésica em uma variedade é construída a partir de uma curva parametrizada por um parâmetro u e um sistema de coordenadas dado por x^a. Assim, nossa curva será dada pelas soluções da seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias para $x^a(u)$:

$$\frac{d^2x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{du}\frac{dx^c}{du} = 0, \qquad (11)$$

onde Γ^i_{jk} é chamado de *símbolo de Christoffel* ou conexão afim, o qual é simétrico nos índices covariantes, podendo ser calculados a partir do tensor métrico da seguinte forma:

$$\Gamma^l_{ki} = \frac{1}{2}g^{lj}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}). \qquad (12)$$

Conclusões

Definido o espaço-tempo de Minkowski e o conceito de variedades diferenciáveis é possível agora descrever o ambiente na qual é construída a relatividade geral.

Na relatividade geral a variedade usada para descrever o espaço - tempo, é quadridimensional $(N = 4)$, pseudo - Riemmaniana com campo tensorial métrico dado por $g_{\mu\nu}$ com $\mu, \nu = (0, 1, 2, 3)^2$; o campo tensorial métrico tem um indefinição caracterizado pela assinatura $(+, -, -, -)$ e sob um ponto $P \in M$ adotaremos um sistema de coordenadas dado pela matriz $[g_{\mu\nu}]_p$. Da mesma forma que na relatividade restrita se tem definido três tipos de vetores, na relatividade geral usamos estes vetores, tangente a curva parametrizada $X^a(u)$:

1. tipo-**tempo** se $g_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu > 0$;
2. tipo-**luz** se $g_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu = 0$;
3. tipo-**Espaço** se $g_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu < 0$;

O entendimento desses conceitos é fundamental para a compreensão da física moderna e das teorias de Einstein. A relatividade restrita e a relatividade geral têm sido confirmadas por uma série de experimentos e observações e são fundamentais para a nossa compreensão do universo.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Eduardo por ter aceitado me orientar desde o começo do curso e por me dar esta oportunidade, bem como pelos conselhos, conversas e aprendizados.

Agradeço ao CNPQ pelo financiamento e a UNIFEI pela estrutura concedida.

Referências

Alonso, Marcelo (1972). *Física um curso universitário v.1 Mecânica*. Edgar Blucher LTDA.

James Foster, J. David Nightingale (2006). *A short course in general relativity*. Springer.

Mario Novello Nelson Pinto Neto, Santiago E. Perez Bergliaffa (2010). *Programa Mínimo de Cosmologia*. Jauá.

[2] onde o índice (0) corresponde a coordenada e os índices $(1, 2, 3)$ correspondem as coordenadas espaciais