ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS PRIMORDIAIS EM COSMOLOGIA

Fernando de Alvarenga Franco[1] (IC), Eduardo Henrique Silva Bittencourt (PQ)[1]
[1]*Universidade Federal de Itajubá*

Palavras-chave: Ondas gravitacionais primordiais. Relatividade geral. Teoria de perturbações em cosmologia.

Introdução

O estudo das ondas gravitacionais primordiais é fundamental para decifrar os segredos do universo em seus estágios iniciais. Estas ondas são vestígios sutis das flutuações quânticas que ocorreram logo após o Big Bang, e sua compreensão pode lançar luz sobre a própria origem do cosmos (DODELSON, 2003) e (MUKHANOV, 2005). O objetivo principal deste trabalho é deduzir uma equação para as ondas gravitacionais, proporcionando entendimentos mais profundos sobre a natureza e evolução do universo. Para tal, adotaremos um método centrado no cálculo das perturbações tensoriais da métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW). Através dessa abordagem, buscamos descrever a evolução das ondas gravitacionais em diferentes épocas cósmicas e sua influência nas estruturas observadas atualmente.

Metodologia

Para uma análise aprofundada das ondas gravitacionais primordiais, nossa abordagem metodológica começou com um estudo preliminar sobre álgebra tensorial (FOSTER & NIGHTINGALE, 2006). Esta ferramenta matemática se mostrou essencial para lidar com descrições em relatividade geral. Com uma compreensão sólida em mãos, avançamos para um estudo mais aprofundado da relatividade geral, abrangendo seus princípios e equações fundamentais. Esta fase preparatória foi crucial para entender os tópicos mais avançados que se seguiram.

Em seguida, voltamos nossa atenção para a métrica de FRW. Esta métrica, que descreve um universo homogêneo e isotrópico em expansão, serviu como a base para nossos cálculos subsequentes. Começamos nossa análise focando nas perturbações escalares da métrica FRW, buscando compreender seu comportamento e influência na evolução do universo (LIDDLE, 2003).

Após nos familiarizarmos com as perturbações escalares, aplicamos a metodologia similar para estudar as perturbações tensoriais da métrica de FRW. Este passo se mostrou de extrema importância, já que as perturbações tensoriais estão diretamente relacionadas às ondas gravitacionais. Finalmente, com o entendimento adquirido sobre as perturbações tensoriais, fomos capazes de deduzir as equações de movimento para as ondas gravitacionais primordiais, culminando em nosso principal objetivo de pesquisa.

Resultados e discussão

A Métrica de FRW é uma solução das equações da relatividade geral que representa um universo homogêneo e isotrópico. Em coordenadas cartesianas, a métrica FRW é dada por (DODELSON, 2003):

$$ds^2 = - dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (1)$$

onde a(t) é o fator de escala que descreve a expansão (ou contração) do universo com o tempo.

Com este entendimento da métrica de FRW, voltamos nossa atenção para as perturbações escalares. Estas foram descritas através de duas funções distintas, ψ e ϕ, ambas dependentes do tempo e do espaço. A função ψ representa o potencial newtoniano, e ϕ denota a perturbação da curvatura espacial. A métrica perturbada toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_{00}(x,t) &= -1 - 2\psi(x,t), \\ g_{0i}(x,t) &= 0, \\ g_{ij}(x,t) &= a^2\delta_{ij}(1 + 2\phi(x,t)), \end{aligned} \qquad (2)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, que representa tensorialmente a matriz identidade.

Com as perturbações definidas, nos dedicamos ao cálculo dos símbolos de Christoffel, os quais são fundamentais em geometria diferencial e relatividade geral, servindo como base na determinação das propriedades da curvatura e da conexão do espaço-tempo. Uma vez obtidos, fomos capazes de identificar o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Este escalar é uma representação condensada da curvatura do espaço-tempo, enquanto o tensor de Ricci oferece um panorama mais detalhado da manifestação dessa curvatura em diferentes direções.

Com a determinação do escalar e tensor de Ricci, pudemos avançar para a formulação das equações de Einstein, descrevendo a dinâmica do espaço-tempo na presença de matéria e energia:

$$- 3H\phi_{,0} + 3\psi H^2 - \frac{k^2\phi}{a^2} = - 4\phi G[\rho_{me}\delta_{me} + \rho_b\delta_b + 4\rho_f\theta_0 + 4\rho_n\theta_0] \tag{3}$$

$$k^2(\phi + \psi) =- 32\pi G a^2[\rho_f\theta_2 + \rho_n N_2] \tag{4}$$

Em que (3) representa a equação temporal de Einstein. e (4) a espacial.

De forma simplificada, o lado esquerdo desta equação descreve a geometria do espaço-tempo, isto é, como o tecido do universo se curva e se deforma. O lado direito, por outro lado, detalha o comportamento da matéria contida dentro desse universo. Juntos, eles mostram como a matéria e a curvatura do espaço-tempo se relacionam.

Por completeza, apresentaremos abaixo as equações de movimento relativas ao conteúdo material do universo, sendo elas:

$$\begin{aligned}
&\dot{\Theta} + ik\mu\Theta = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau}\left[\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi\right] \\
&\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0} \\
&\dot{\Theta}_P + ik\mu\Theta_P = -\dot{\tau}\left[-\Theta_P + \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P}_2(\mu))\Pi\right] \\
&\dot{\delta} + ikv = -3\dot{\Phi} \\
&\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = -ik\Psi \\
&\dot{\delta}_b + ikv_b = -3\dot{\Phi} \\
&\dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_b = -ik\Psi + \frac{\dot{\tau}}{R}\left[v_b + 3i\Theta_1\right] \\
&\dot{\mathcal{N}} + ik\mu\mathcal{N} = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi.
\end{aligned} \tag{5}$$

Estas equações surgem de uma análise baseada na mecânica estatística, em particular, na aplicação da equação de Boltzmann no contexto cosmológico.

Seguindo esta análise, passamos para as perturbações tensoriais. Estas perturbações são de especial interesse, pois são precisamente elas que constituem as ondas gravitacionais primordiais. Em essência, o processo envolve a perturbação da métrica de FRW utilizando um tensor específico.

$$g_{ij} = a^2(t)\begin{bmatrix} 1+h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & 1-h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Empregando um procedimento semelhante ao utilizado para as perturbações escalares, fomos capazes de derivar uma equação de movimento para essas ondas gravitacionais.

$$\ddot{h}_{+,\times} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_{+,\times} + k^2 h_{+,\times} = 0. \tag{7}$$

Notavelmente, essa equação assemelha-se à de um oscilador harmônico amortecido (ALONSO & FINN, 2018). Tal observação é crucial, pois os comportamentos e soluções associados a um oscilador harmônico amortecido têm implicações significativas na cosmologia. No entanto, a análise detalhada dessas implicações cosmológicas e o que elas revelam sobre o universo em seus estágios iniciais será objeto de um trabalho posterior.

Conclusões

Neste trabalho, iniciamos uma investigação sobre as ondas gravitacionais primordiais, utilizando como base a métrica de FRW. Através do estudo das perturbações escalares e tensoriais, destacamos a equação fundamental de Einstein como ponte entre a geometria do espaço-tempo e o comportamento da matéria. As perturbações tensoriais, representando as ondas gravitacionais, trouxeram perspectivas significativas, em especial sua associação com um oscilador harmônico amortecido. Embora tenhamos avançado em nossa compreensão, muitas implicações cosmológicas dessas descobertas aguardam análises mais detalhadas no futuro.

Agradecimentos

F.A.F. agradece à Universidade Federal de Itajubá pela oportunidade oferecida e à FAPEMIG pelo apoio financeiro (BIC 7788). E.B. agradece ao CNPq pelo apoio financeiro (bolsa nº. 305217/2022-4).

Referências

ALONSO, M.; FINN, E. J. Física: Um curso universitário-Mecânica. Editora Blucher, 2018.
DODELSON, S. Modern cosmology. Academic Press, 2003.
FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J.D. A short course in general relativity. Springer, 2006.
LIDDLE, A. An introduction to modern cosmology. John Wiley & Sons, 2003.
MUKHANOV, V. Physical foundations of cosmlogy. Cambridge University Press, 2005.