FUNÇÕES HARMÔNICAS E SUAS PRINCIPAIS PROPRIEDADES

Pedro Henrique Sotelino Pereira dos Santos[1] (IC), Giane Casari Rampasso (PQ)[1]
1Universidade Federal de Itajubá

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais. Equações elípticas. Operador de Laplace.

Introdução

As funções harmônicas, funções estas que são soluções da equação de Laplace, são objeto de estudo primordial na matemática moderna e têm desempenhado um papel fundamental nas diversas ramificações da análise, em particular, das equações diferenciais parciais e a teoria do potencial, encontrando aplicações em diversos campos como a física e o estudo de fluxos, por exemplo. Este trabalho apresentará as propriedades básicas das funções harmônicas e suas consequências, explorando suas propriedades essenciais, tais como a Fórmula do Valor Médio para Equação de Laplace, a Suavidade, o Princípio do Máximo e a Desigualdade de Harnack, tendo como aspecto principal o Princípio do Máximo.

Conceitos Básicos

Nesta seção apresentaremos os conceitos básicos relativos às funções harmônicas. Apresentaremos também a Fórmula do Valor Médio para a Equação de Laplace, que desempenha um papel fundamental no Princípio do Máximo.
Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $f:\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função dada. Então definimos:

Equação de Laplace: é dada por

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega,$$

onde Δ é o operador Laplaciano e u é uma função definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Equação de Poisson: é uma equação da forma

$$-\Delta u = f.$$

Função Harmônica: é uma função $u \in C^2(\Omega)$ que satisfaz a equação de Laplace; isto é, tal que $\Delta u = 0$.

Solução fundamental: A função $\Phi(x)$, que é definida por:

$$-\frac{1}{2\pi}\log|x| \text{ se } (n = 2)$$

e

$$\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x-y|^{n-2}} \text{ se } (n \leq 3),$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ é chamada solução fundamental da equação de Laplace.

No que segue, apresentamos a Fórmula do Valor Médio para a Equação de Laplace.

Teorema 1 (Fórmula do Valor Médio): Se $u \in C^2(\Omega)$ é uma função harmônica, então

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} u\ dy = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u\ dS,$$

para cada bola $B(x,r) \subset \Omega$.

Teorema 2 (Recíproca da Fórmula do Valor Médio): Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfazer

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u\ dS$$

para cada bola $B(x,r) \subset \Omega$, então u é uma função harmônica.

Resultados e discussão

Vamos apresentar a seguir as principais propriedades de funções harmônicas estudadas neste trabalho.

Teorema 3 (Princípio do Máximo): Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma função harmônica em Ω. Então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração:
Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ uma função harmônica. Suponha que existem

$$u(x_0) = M := \max_{\overline{\Omega}} u$$

e

$$u(y_0) = N := \max_{\partial\Omega} u,$$

onde $x_0, y_0 \in \Omega$.
Como $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica então podemos aplicar o Teorema 1, e assim

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u \; dS \\ &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} u \; dy, \end{aligned}$$

para toda $B(x_0, r) \subset \Omega$, e

$$\begin{aligned} u(y_0) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(y_0,r)} u \; dS \\ &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(y_0,r)} u \; dy, \end{aligned}$$

para toda $B(y_0, r) \subset \Omega$.
Tome r_1 tal que $B(x_0, r) \subset B(y_0, r_1)$. Como $B(x_0, r) \subset B(y_0, r_1)$ então

$$\frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} u \; dy \leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(y_0,r_1)} u \; dy.$$

Note que:

$$M = u(x_0) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u \; dS$$

e

$$N = u(y_0) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(y_0,r_1)} u \; dS$$

Em particular, como

$$\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u \; dS \leq \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(y_0,r_1)} u \; dS$$

então

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u \; dS \\ &\leq \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(y_0,r_1)} u \; dS = N, \end{aligned}$$

e como $N \leq M$ por definição, concluímos que

$$M \leq N \leq M.$$

Portanto $M = N$. □

A seguir, como aplicação do Príncipio de Máximo, estabelecemos a existência e unicidade de solução para o problema de valor de contorno envolvendo a equação de Poisson.

Teorema 4 (Existência e Unicidade): Seja $g \in C(\partial\Omega)$ e $f \in C(\Omega)$. Então existe no máximo uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ do problema do valor de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } \Omega \\ u = g \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

O próximo teorema nos diz que se $u \in C^2(\Omega)$ é uma função harmônica, então necessariamente $u \in C^\infty$. Por isso, funções hamônicas são automaticamente infinitamente diferenciáveis. O ponto interessante deste fato é que a estrutura algébrica da equação de Laplace, nos leva à dedução analítica de que todas as derivadas parciais de u existem, mesmo aquelas que não aparecem na equação.

Teorema 5 (Regularidade): Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz a fórmula do valor médio apresentado no Teorema 1, para cada bola $B(x, r) \subset \Omega$, então $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

Finalmente, apresentamos a Desigualdade de Harnack, um importante resultado na teoria das funções harmônicas.

Teorema 6 (Desigualdade de Harnack): Para cada conjunto aberto conexo $V \subset\subset \Omega$, existe uma constante positiva α, dependendo apenas de V, tal que

$$\sup_V u \leq \alpha \inf_V u,$$

para toda função harmônica não negativa $u \in \Omega$. Assim, em particular,

$$\frac{1}{\alpha} u(y) \leq u(x) \leq \alpha u(y)$$

para todos os pontos $x, y \in V$.

Conclusões

Neste trabalho mostramos que as propriedades das funções harmônicas tem consequências importantes, como o Princípio do Máximo. Além disso, como consequência do Princípio do Máximo temos o Teorema de Existência e Unicidade para o Problema de Dirichlet associado à Equação de Poisson, mostrando que as funções harmônicas desempenham um papel importante na área de equações diferenciais parciais.

Agradecimentos

À Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) pelo ambiente de pesquisa enriquecedor e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (Fapemig) pelo apoio financeiro que tornou este estudo possível.

Referências

1. EVANS, Lawrence C. **Equações Diferenciais Parciais** . Sociedade Matemática Americana, 2010.
2. GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S.. **Equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem** . Berlim: Springer, 1977.
3. IÓRIO JR, Rafael; IÓRIO, Valéria de Magalhães. **Equações diferenciais parciais: uma introdução**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.