

ESTUDO E PESQUISA NA EQUAÇÃO DE MATHIEU MODIFICADA

Henrique D. Borges¹ (IC), Ricardo Iván M. Bascur² (PQ)

^{1,2}Universidade Federal de Itajubá

Palavras-chave: D3-brana. Probabilidade de absorção. Série log-potência.

Introdução

- Tema

A análise e estudo da solução da equação de Mathieu modificada em um problema de física teórica.

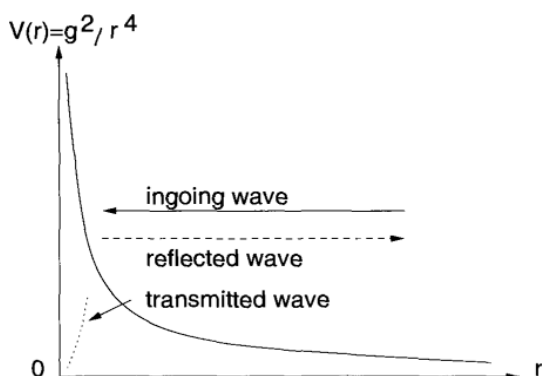
- Objetivo da pesquisa

Acompanhar os extensos e elaborados cálculos que estão por trás do trabalho do artigo de Gubser e Hashimoto [2] e apresentá-los ao leitor de uma forma mais acessível, fornecendo adequadamente detalhes dos cálculos.

- Justificativa

Analisar a aparição da equação de Mathieu modificada em um problema relacionado às ondas de tunelamento em um potencial radial produzido por uma D3-brana que curva o espaço-tempo (veja a equação (4): na subseção “Desenvolvimento teórico” da seção “Metodologia” será explicada a origem dessa equação, mencionando que nas proximidades da distância radial $r = 0$ o potencial radial que a partícula vê é da forma $V(r) = \frac{g^2}{r^4}$, tal como aparece na figura abaixo).

Gráfico 1 - A função potencial que a partícula vê nas proximidades da distância radial $r=0$.



Fonte: Introduction to Quantum Mechanics: Schrodinger Equation and Path Integral (2006).

- Método utilizado

Uma reprodução detalhada dos cálculos teóricos desenvolvidos por Gubser e Hashimoto [2] para obter uma expressão que descreva a probabilidade de absorção de uma partícula escalar devido ao potencial radial gerado pela D3-brana, a qual vem dada, a baixas energias, por uma série que envolve potências de ωR e do logaritmo natural de $\omega \bar{R}$:

$$P(l) = \frac{4\pi^2}{(l+1)!^4(l+2)^2} \left(\frac{\omega R}{2}\right)^{8+4l} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_{n,k} (\omega R)^{4n} (\ln \omega \bar{R})^k, \quad (1)$$

onde $\bar{R} = Re^\gamma/2$, sendo γ a constante de Euler-Mascheroni, R é uma distância característica da métrica do espaço-tempo produzido pela D3-brana e ω e l ($=0, 1, 2, 3, \dots$) são a energia e o momento angular de uma partícula escalar relativística de massa nula.

Nas palavras-chaves deste resumo nos referimos ao tipo de série que aparece na equação (1) como ‘Série log-potência.’

Metodologia

- Revisão e Estudo de Funções da Física-Matemática

Nesta etapa, estudamos algumas propriedades básicas das funções Gama, Poligama e a Zeta de Riemann. Encontramos uma expressão que relaciona $\ln \Gamma(z + 1)$ com $\zeta(z)$:

$$\ln \Gamma(z + 1) = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n \zeta(n)}{n}, \quad |z| < 1. \quad (2)$$

Utilizamos essa expressão com o logaritmo natural, pois no desenvolvimento dos cálculos que conduzem a expressão dos coeficientes $b_{n,k}$ em (1) surgem derivadas de $\ln \Gamma(z + 1)$ avaliadas em $z = 0$.

- Desenvolvimento Teórico

A equação de Mathieu modificada,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\lambda \cosh(2z) - p\right) \psi(z) = 0, \quad (3)$$

surge nos cálculos de Gubser e Hashimoto [2], ao escrever a equação de Schroedinger para uma partícula escalar livre relativística de massa nula, de energia ω e momento angular $l(= 0, 1, 2, 3, \dots)$, que se propaga no espaço tempo produzido pela D3-brana:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{5}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+4)}{r^2} + \omega \left(1 + \frac{R^4}{r^4} \right) \right] \Phi^{(l)}(r) = 0. \quad (4)$$

Após fazer a mudança de variáveis $r = Re^{-z}$ e $\Phi(r) = e^{2z}\psi(z)$, precisamente chega-se à equação:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega R \cosh(2z) - \frac{l+2}{2} \right) \psi(z) = 0. \quad (5)$$

Esta é a equação de Mathieu modificada apresentada em (3), após identificar $p = \frac{l+2}{2}$ e $\lambda = \omega R/2$.

A resolução desta equação utilizando o método de Dougall [1] nos fornecerá as expressões e o ferramental matemático para obter expressão da probabilidade de absorção (1).

Para uma melhor compreensão das relações entre as expressões vistas nesta subseção e a fórmula em (1), devemos mencionar que no artigo [2], Gubser e Hashimoto justificam que a probabilidade de absorção, P , é inicialmente dada pela seguinte fórmula:

$$P = \frac{|\eta - \frac{1}{\eta}|^2}{|\eta - \frac{1}{\eta}|^2 + |\chi - \frac{1}{\chi}|^2}, \quad (6)$$

onde as expressões de η e χ são dada por:

$$\eta = e^{i\pi\nu} \quad e \quad \chi = \frac{\Phi\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{\nu}{2}\right)}. \quad (7)$$

As expressões acima serão desenvolvidas em termos ω , R e l , a partir da solução da EDO de Mathieu modificada apresentada em (5), a qual é dada por [1]:

$$\psi(z) = J(\nu, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi\left(n + \frac{\nu}{2}\right) e^{(2n+\nu)z}. \quad (8)$$

É importante ressaltar que o índice ν não é arbitrário, mas sua expressão é determinada por uma série de potências de ωR , que surge no momento de resolver a equação de recorrência dos coeficientes Φ na fórmula de $\psi(z)$.

Com as expressões de η e χ obtidas, podemos substituí-las em (6). Dessa forma, ao desenvolver a razão à direita desta expressão, encontraremos a expressão correspondente à expansão de P em (1).

Além disso, a expressão de Φ , utilizada na resolução de χ em (7), consiste em uma série de potências de ωR e de $ln\omega R$. Alguns dos coeficientes desta série vem

dados em termos da função Poligama avaliada em números inteiros. Esses valores são obtidos ao considerar as derivadas da equação (2).

Portanto, quando substituimos a variável χ na equação (6), isso implica que usamos as derivadas da equação (2) como parte dos cálculos para obter a resposta apresentada na equação (1).

- Método Computacional de Análise

Utilizamos o software Mathematica para realizar os numerosos e extensos cálculos que apareceram durante a resolução das equações apresentadas no artigo.

Resultados e discussão

- Confirmação das equações do artigo

Conseguimos calcular todas as equações que são necessárias para a expressão da probabilidade de absorção da partícula (1).

- Reprodução da tabela do artigo

Os primeiros coeficientes $b_{n,k}$ da série em (1) foram obtidos ao estudarmos os casos em que $p = 1$, $p = 3/2$, $p = 2$ (que correspondem aos casos em que $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$), e fomos capazes de reproduzi-la com o auxílio do software Mathematica e verificar esses coeficientes, até a ordem $(\omega R)^{24}$. Além disso, encontramos uma divergência (com relação ao resultado encontrado por Gubser e Hashimoto [2]) no termo independente de $\zeta(n)$, na última linha da coluna para $p = 2$, isto é, no termo que vai acompanhado de um (*) nesta coluna.

Segue abaixo a tabela com esses coeficientes para cada valor de p :

Tabela 1 - Coeficientes de $b_{n,k}$ para $p=1$ ($l=0$).

	$p=1$
$b_{1,1}$	$\frac{1}{6}$
$b_{1,0}$	$\frac{7}{72}$
$b_{2,2}$	$\frac{17}{576}$
$b_{2,1}$	$-\frac{161}{4608}$
$b_{2,0}$	$\frac{5561}{663552} - \frac{11\zeta(2)}{576}$
$b_{3,3}$	$-\frac{11}{2592}$
$b_{3,2}$	$\frac{623}{82944}$
$b_{3,1}$	$-\frac{39037}{9953280} + \frac{49\zeta(2)}{6912}$

$b_{3,0}$	$\frac{1093099}{2388787200} - \frac{1379\zeta(2)}{331776} + \frac{5\zeta(3)}{41472}$
-----------	--

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Tabela 2 - Coeficientes de $b_{n,k}$ para $p=3/2$ ($l=1$).

	$p=3/2$
$b_{1,1}$	$\frac{1}{-24}$
$b_{1,0}$	$\frac{53}{1152}$
$b_{2,2}$	$\frac{1}{1152}$
$b_{2,1}$	$\frac{1}{757}$
$b_{2,0}$	$\frac{261343}{132710400} - \frac{\zeta(2)}{4608}$
$b_{3,3}$	$\frac{1}{82944}$
$b_{3,2}$	$\frac{7}{69120}$
$b_{3,1}$	$\frac{554911}{3185049600} + \frac{\zeta(2)}{110592}$
$b_{3,0}$	$\frac{65129557}{764411904000} - \frac{101\zeta(2)}{2211840} - \frac{\zeta(3)}{663552}$

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Tabela 3 - Coeficientes de $b_{n,k}$ para $p=2$ ($l=2$).

	$p=2$
$b_{1,1}$	$\frac{1}{-60}$
$b_{1,0}$	$\frac{19}{800}$
$b_{2,2}$	$\frac{1}{7200}$
$b_{2,1}$	$\frac{821}{1728000}$
$b_{2,0}$	$\frac{44071}{103680000} - \frac{\zeta(2)}{28800}$
$b_{3,3}$	$\frac{1}{1296000}$
$b_{3,2}$	$\frac{479}{103680000}$
$b_{3,1}$	$\frac{1731599}{174182400000} + \frac{\zeta(2)}{1728000}$
$b_{3,0}$	$\frac{261183301}{36578304000000} - \frac{414720000}{479\zeta(2)} - \frac{\zeta(3)}{10368000}$

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- Complementação da tabela do artigo

Utilizando os resultados de nossos cálculos, fomos capazes de obter os dados necessários para construir uma coluna adicional, para o caso $p = 5/2$ ($l=3$), dos primeiros coeficientes em nossa tabela.

Tabela 4 - Coeficientes de $b_{n,k}$ para $p=5/2$ ($l=3$).

	$p=5/2$
$b_{1,1}$	$\frac{1}{-120}$
$b_{1,0}$	$\frac{133}{9600}$
$b_{2,2}$	$\frac{1}{28800}$
$b_{2,1}$	$\frac{1259}{9676800}$
$b_{2,0}$	$\frac{21131021}{162570240000} - \frac{\zeta(2)}{115200}$
$b_{3,3}$	$\frac{1}{10368000}$
$b_{3,2}$	$\frac{1751}{2903040000}$
$b_{3,1}$	$\frac{26186857}{19508428800000} + \frac{\zeta(2)}{13824000}$
$b_{3,0}$	$\frac{34319276903}{32774160384000000} - \frac{1751\zeta(2)}{11612160000} - \frac{\zeta(3)}{82944000}$

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Deve-se destacar que a função P , definida em (1) e em (6), é uma função não elementar (assim como as funções de Bessel na grande maioria dos casos). Ao determinar a expressão dos coeficientes $b_{n,k}$ é o equivalente a conhecer os primeiros termos da série que se tem para a função P . Com esses termos, podemos calcular o valor numérico de P para pequenos valores de ω (semelhante à forma que conhecendo os primeiros termos da série de Taylor de e^x podemos avaliar numericamente essa função para valores pequenos de $|x|$).

Conclusões

Neste projeto, fomos capazes de reproduzir completamente e resolução da equação de Mathieu modificada no estudo de um problema de física teórica. Além disso, nos deparamos com uma nova abordagem para resolver a EDO de Mathieu modificada, desenvolvida no artigo de Dougall [1], o qual nos forneceu um ferramental matemático importante ao longo do desenvolvimento teórico. Conseguimos não só calcular, de forma satisfatória, a expressão da probabilidade de absorção da partícula na D3-brana na

obtenção dos valores da tabela do artigo, mas também, fomos além e desenvolvemos os cálculos para ordens mais altas de (ωR) e de $\ln(\omega \bar{R})$.

Agradecimentos

O aluno agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pela concessão da Bolsa de Iniciação Científica durante a realização do projeto, bem como ao professor Ricardo Iván Medina Bascur pela coordenação da pesquisa, assim como pelas suas fundamentais orientações durante o trabalho. O aluno agradece também à Unifei pelo auxílio fornecido e pela disponibilização do software Mathematica, que possibilitou a emulação dos cálculos matemáticos.

Referências

1. Dougall, J. The solution of Mathieu's differential equation. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**. Cambridge University. v. 34, p. 176-196, fev. 1915.
2. Gubser, S. S.; Hashimoto, A. Exact absorption probabilities for the D3-brane. *Comunicações em Física Matemática*. Springer-Verlag, v. 203, p. 325-340, 1999. 325-340. [hep-th/9805140].