

INTRODUÇÃO AOS BILHARES E SUA GEOMETRIA

Pedro Esteves¹ (IC), Lucas Ruiz dos Santos (PQ)¹

UNIFEI - Universidade Federal de Itajubá

Palavras-chave: Bilhares, Geometria, Elipses, Órbitas Invariantes, Integridade.

Introdução

Neste trabalho, é tratado o conceito de bilhar matemático, em alguns exemplos e aplicações simples e estudos de bilhares internos a triângulos abertos, círculos, quadrados e elipses, todos em \mathbb{R}^2 , a partir das principais referências [Tab05] e [GR21].

O bilhar matemático pode ser pensado como uma idealização que pretende descrever o movimento de uma massa pontual interna a uma região fechada ou aberta, mas em geral com fronteiras, (como uma curva simples em um plano), que se desloca em velocidade constante (sobre geodésicas) e obedece à lei de reflexão em cada uma de suas colisões com a fronteira da região: “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão”.

Metodologia

A pesquisa foi realizada sobre intuito de compreensão intelectual do assunto e divulgação. A metodologia utilizada consistiu na leitura de textos introdutórios ao assunto, posteriormente de textos mais avançados e alguns artigos de pesquisa [LT07] e [GKR23]. O material estudado e os problemas resolvidos foram discutidos em reuniões semanais com o orientador. Aliado ao estudo dos resultados analíticos apresentados na literatura, buscou-se realizar uma série de exemplos e análises numéricas com o auxílio do software Mathematica, os quais foram importantes para a melhor compreensão e apreciação dos resultados gerais demonstrados.

Resultados e discussão

Em bilhares, de forma mais simples naqueles que possuem bordas compostas por retas, pode se pensar na reflexão da partícula com uma dessas bordas através de desdobramentos da região, isto é, reflexões da região em torno da borda cobrindo um caminho em linha reta da partícula. Essa visualização, nesses cenários, é útil

para transpor o problema para um campo geométrico, de interseções de retas e figuras planas. A Figura 1 ilustra um exemplo.

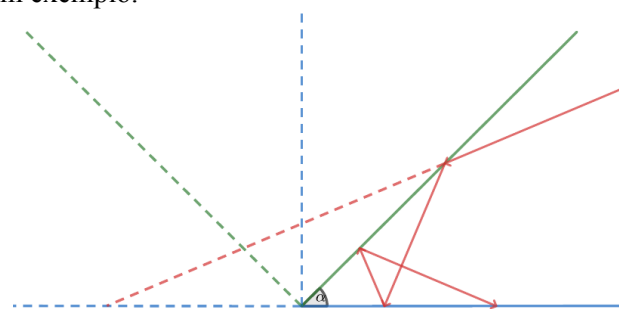


Figura 1 – Reflexão em um vértice.

Através dessa técnica pode-se, por exemplo, demonstrar que em um bilhar interno a um setor de ângulo α , entre duas retas no plano \mathbb{R}^2 , uma partícula que não vem de nenhuma colisão anterior sempre colide, ou equivalentemente, desdobra o triângulo $\lceil \pi/\alpha \rceil$ vezes antes de nunca mais colidir novamente, ver [Tab05].

Através de desdobramentos, e de uma relação com o toro plano, também é possível mostrar que o bilhar interno a um quadrado unitário pode ser decomposto em dois bilhares internos a círculos.

O bilhar no círculo é relativamente simples, pois seu comportamento é determinado através de rotações por um único ângulo fixado pela condição inicial. Apesar dessa simplicidade, este bilhar apresenta um resultado surpreendente provindo do fato de que trajetórias com ângulos iniciais de partida π -irracionais geram órbitas densas e equidistribuídas, enquanto π -racionais geram órbitas periódicas que sempre retornam aos mesmos pontos após um número fixo de reflexões na fronteira. Além disso, após fixar um ângulo de partida α , há uma região interna e concêntrica com o círculo original de raio $\cos \alpha$, que nunca é atingida por nenhuma trajetória da partícula, mesmo que α seja π -irracional. Por isso, apesar de simples, ela resguarda algumas complexidades.

Apesar disso, e de que o bilhar interno ao círculo aparente possuir interesse puramente geométrico, pode-se usar suas propriedades de equidistribuição para demonstrar a *Lei de Benford*, que trata da distribuição estatística da frequência de ocorrência dos primeiros dígitos de potências de 2, isto é, cada dígito tem uma recorrência de aparição distinta. Esta propriedade é útil na análise de dados para averiguação de possíveis manipulações nos mesmos. Como ilustração, na Tabela 1 são apresentadas as probabilidades de ocorrência de cada dígito como primeiro algarismo da potência 2^n . Na Figura 2 são ilustradas as frequências de ocorrência dos dígitos 1, 2, 6 e 7 como função da potência n e sua convergência para o valor esperado.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(k)$	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

Tabela 1 – Probabilidade de 2^n começar com dígito k [Tab05].

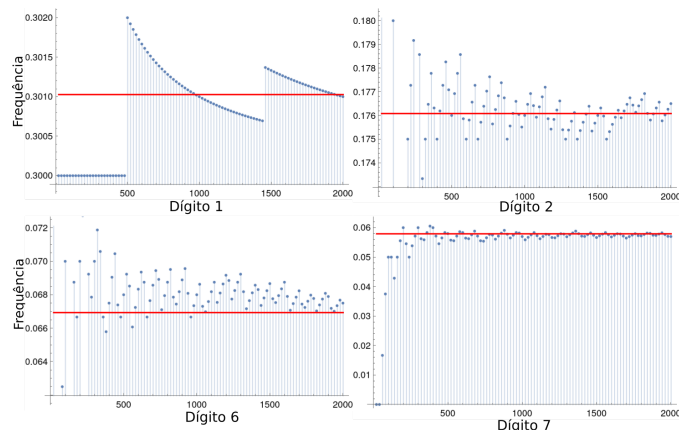


Figura 2 – Frequência de ocorrência dos dígitos 1, 2, 6 e 7 como primeiro algarismo de 2^n , até $n = 2000$.

Entretanto, essa técnica de desdobramentos não se demonstra aplicável para bilhares com bordas curvas, como no caso da elipse, dificultando sua análise.

A elipse, sendo uma figura construída através de pontos cuja a soma das distâncias a seus focos é constante, preserva empiricamente uma propriedade reflexiva, sendo essa a propriedade de que ao lançar-se uma partícula a partir de um de seus focos, após a reflexão, a trajetória sempre passará pelo foco oposto. Dessa forma, se uma trajetória de uma órbita passa por um dos focos dessa elipse então todas as trajetórias dessa órbita passarão por algum foco. Além disso, tais órbitas sempre convergem para o raio maior da elipse [Hum19]. Uma consequência imediata é que se algum

raio não passar por foco, então a órbita completa a qual pertence nunca passa ou passou por algum foco.

De fato, existem dois tipos de trajetórias que não passam por focos da elipse: as internas, as quais têm alguma trajetória que passa pelo segmento que conecta seus focos, assim sempre passando por ele novamente após cada colisão; e as externas, as quais nunca passam pelo segmento que une os dois focos em nenhuma trajetória de sua órbita.

Dada essa natureza interessante da elipse, uma questão natural é saber se existem órbitas periódicas em seu bilhar. Um exemplo imediato é aquela que sai de um de seus vértices do eixo maior e passa por um foco, sendo essa 2-periódica. Mas também existem órbitas periódicas com mais pontos distintos, entretanto essas são muito mais difíceis de localizar analiticamente. Como exemplo no caso 3-periódico, temos uma expressão explícita para o seu ângulo de saída [GR21]

$$\cos \alpha = \frac{a^2 b \sqrt{-a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^4 - b^2 c^2}}}{c^2 \sqrt{a^4 - c^2 x_1^2}}, \quad (1)$$

onde α é o ângulo que a trajetória forma com o gradiente no ponto $P = (x_1, y_1)$ da elipse, a e b os comprimentos de seus semi-eixos e c a distância do foco ao centro, os quais satisfazem a relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

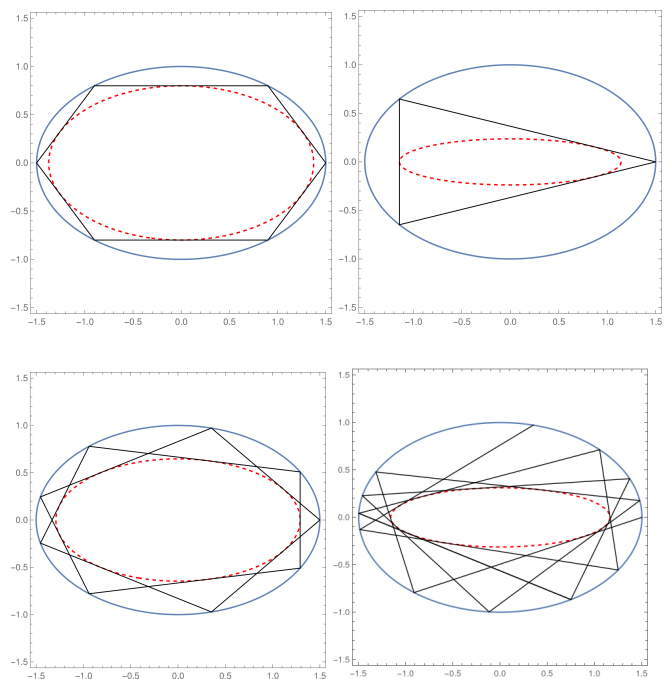


Figura 3 – Exemplos de órbitas 6,3,9-periódicas e uma não periódica, e suas cáusticas, obtidas por métodos numéricos.

Similarmente ao caso específico do círculo, órbitas na elipse, que não passam pelos focos, são tangentes a cônicas confocais à elipse original, chamadas cáusticas. Caso seja uma órbita externa, as cáusticas são elipses, caso seja uma interna as cáusticas são hipérbolas. Assim, a toda órbita está associada uma única cáustica. O Teorema de Poncelet garante que a recíproca é válida.

Teorema 1 (Porisma de Poncelet):

Considere duas cônicas confocais $\gamma \subset \Gamma$, tome um ponto $p \in \Gamma$ e trace dele uma reta tangente à γ , conseqüentemente todas as trajetórias da órbita serão tangentes à γ . Caso a órbita seja n -periódica, ao tomar outro ponto $p_2 \in \Gamma$ e repetir a construção, então sua nova órbita também fechará em n iterações [Bos+87].

Tomando a seguinte orientação ilustrada na Figura 4, é possível construir um retrato de fase com as órbitas periódicas, garantidas pelo Teorema 1. Note que para órbitas convexas, quanto maior o n maior é o afastamento da separatriz (representada pela curva preta que se auto intersecta), sendo essa a curva das órbitas que passam pelos focos, separando as curvas de órbitas externas e internas.

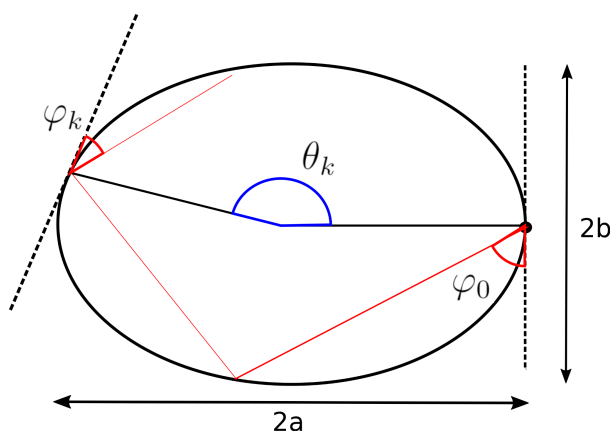


Figura 4 – Definição dos ângulos da órbita.

Na Figura 4, θ_k é o ângulo com eixo x, e φ_k é o ângulo formado entre a tangente da elipse no ponto e a reta que une o centro a esse k -ésimo ponto da órbita. Essa é a convenção usada em todos os retratos de fase das Figuras 5, 6 e 8.

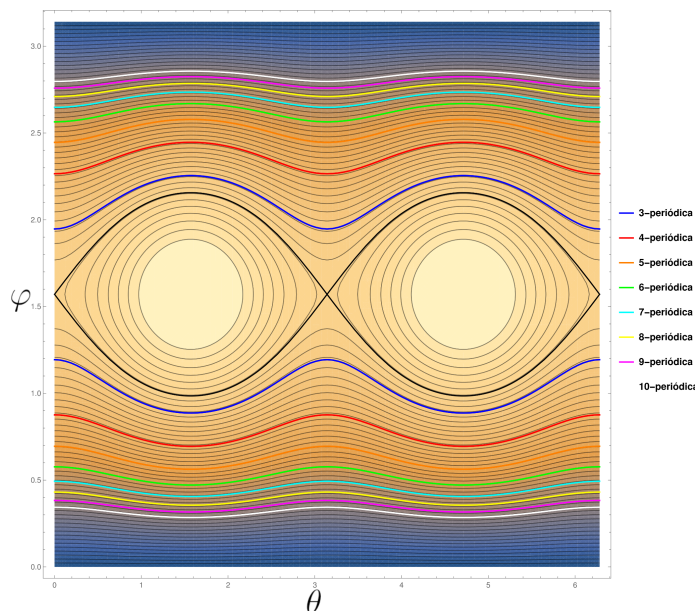


Figura 5 – Retrato de fase do bilhar na elipse.

Diferentemente de elipse usual, as 3-elipses (elipses de 3 focos) não mantêm seu comportamento estável, suas órbitas adquirem um comportamento caótico facilmente, e propriedades se perdem, como a de que órbitas que passam pelo segmento que une os focos sempre o farão novamente. É visível em seu retrato de fase que existem três tipos distintos de regiões, a primeira mais estável e organizada com padrões abaulados fechados, e outra com órbitas completamente difusa, caótica, e por fim aquela caracterizada pelas órbitas que tendem a borda da elipse, mais estáveis e alongadas. O comportamento caótico observado é devido ao fato de este não ser um bilhar integrável [KS18]. Determinar quais bilhares planos são integráveis é um grande desafio matemático, formulado segundo a Conjectura de Birkhoff [Bir27].

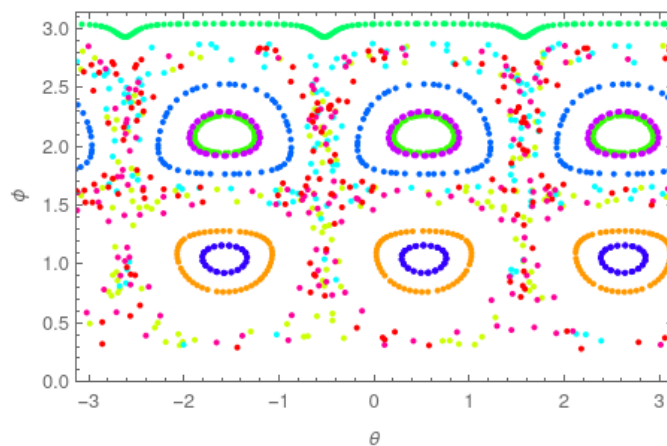


Figura 6 – Retrato de fase do bilhar na 3-elipse.

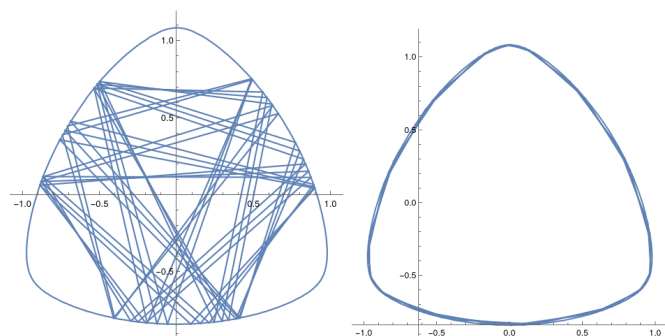


Figura 7 – Exemplos de trajetórias na 3-elipse.

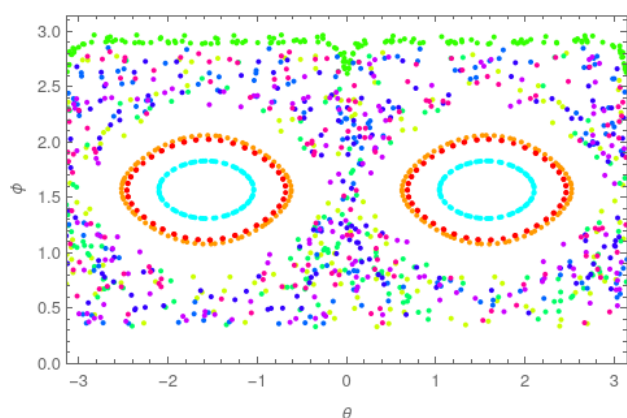


Figura 8 – Retrato de fase da 3-elipse de focos alinhados.

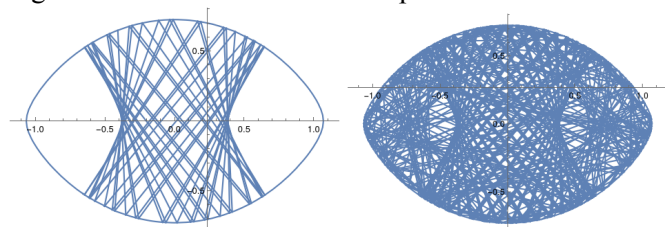


Figura 9 – Trajetórias na 3-elipse de focos alinhados.

Conjectura de Birkhoff:

A fronteira de um bilhar estritamente convexo e plano é integrável se, e somente se, essa fronteira for uma elipse (ou um círculo, como caso degenerado). Um bilhar é dito integrável se existe uma função não constante $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que ao longo de cada órbita, f assume um valor fixo, sendo E o espaço de fase do bilhar, o conjunto das duplas (posição, velocidade).

Conclusões

Sobre o que foi exposto, fica evidente que o bilhar matemático, por mais que de formulação simples, pode ser trabalhado de diversas formas, podendo até gerar conexões para aplicações em outras áreas como computação e física, mesmo que a priori fosse uma importante ferramenta para a análises de problemas

matemáticos. Tão surpreendente quanto às possíveis aplicações é a complexidade dos problemas em aberto que surgem nesta área de pesquisa.

Agradecimentos

Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal de Itajubá (PIBIC/UNIFEI) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Referências

- [Bir27] Birkhoff, G. D. “On the periodic motions of dynamical systems”. *Acta Math* 50.1 (1927), pp. 359–379.
- [Bos+87] Bos, H.J.M. et al. “Poncelet’s closure theorem”, Expo. 1987.
- [GKR23] Garcia, R., Koiller, J., Reznik, D. “Loci of 3-periodics in an Elliptic Billiard: why so many ellipses?” *Journal of Symbolic Computation* 114 (2023), pp. 336–358.
- [GR21] Garcia, R., Reznik, D. “Discovering Poncelet Invariants in the Plane”. *Rio de Janeiro: IMPA* (2021).
- [Hum19] Humenberger, H. “Elliptical billiard tables: An easy proof for a special convergence”. *Australian Mathematics Education Journal* 1.3 (2019), pp. 33–34.
- [KS18] Kaloshin, V., Sorrentino, A. “On the local Birkhoff conjecture for convex billiards”. *Annals of Mathematics* 188.1 (2018), pp. 315–380.
- [LT07] Levi, M., Tabachnikov, S. “The Poncelet grid and billiards in ellipses”. *The American Mathematical Monthly* 114.10 (2007), pp. 895–908.
- [Tab05] Tabachnikov, S.. “*Geometry and billiards*”. Vol. 30. American Mathematical Soc., 2005.