FUNÇÕES DE MORSE

Brian Rennó Nascimento Santos[1] (IC), Ingrid Sofia Meza Sarmiento (PQ)[1]
[1]*Universidade Federal de Itajubá.*

Palavras-chave: Diferenciabilidade. Lema de Morse. Pontos Críticos.

Introdução

O objetivo principal do trabalho é apresentar um dos resultados da Teoria de Morse, que nesse caso foi o Lema de Morse e trazer aplicações para seu melhor entendimento. Para a realização do trabalho utilizamos os livros citados na parte de referências, gráficos para melhor visualização, e por fim fizemos aplicações do Lema de Morse para o estudo do gráfico de funções de duas variáveis que possuem pontos críticos não-degenerados.

Metodologia

Primeiramente foi feita uma revisão do cálculo diferencial de uma e várias variáveis. Tendo isso, estudamos os pontos críticos degenerados e não-degenerados de funções de uma e de duas variáveis, onde foram usados gráficos das funções para melhor entendimento. O Lema de Morse foi estudado em seguida, onde foi estudado a demonstração desse Teorema e feitas aplicações para melhor entendimento do funcionamento do Lema de Morse.

Resultados e discussão

Os principais resultados foram o maior entendimento do Lema de Morse e aplicações do mesmo. Esse lema é muito usado na Teoria Qualitativa de Sistemas Hamiltonianos e na Teoria de Singularidades e classifica, localmente, todos os pontos críticos não-degenerados de funções diferenciáveis. De fato, esse resultado nos diz que em uma vizinhança local para tais pontos a função se expressa como uma forma quadrática.

Teorema (*Lema de Morse* [3]): Seja p_0 um ponto crítico não-degenerado de uma função f de classe C^∞ e de duas variáveis a valores reais. Então, podemos escolher, apropriadamente, um sistema de coordenadas locais (X, Y) para p_0 de forma que a função f, nessas novas coordenadas, seja de uma dessas três formas quadráticas a seguir:

1. $f(X,Y) = X^2 + Y^2 + c$
2. $f(X,Y) = X^2 - Y^2 + c$
3. $f(X,Y) = -X^2 - Y^2 + c$,

onde c é uma constante ($c = f(p_0)$) e p_0 pode ser assumido como sendo a origem ($p_0 = (0,0)$), sem perda de generalidade.

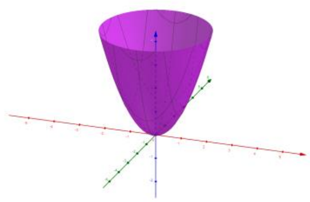

Figura 1 - Gráfico da função do item 1.

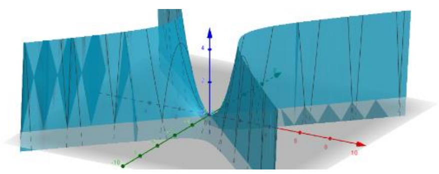

Figura 2 – Gráfico da função do item 2.

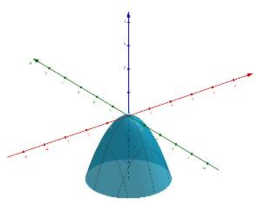

Figura 3 - Gráfico da função do item 3.

Nas Figuras 1, 2 e 3 o eixo x é a reta na cor verde, o eixo y é a reta na cor vermelha e o eixo z é a reta na cor azul.

Por um *sistema de coordenadas locais* entenderemos um difeomorfismo g de um aberto U do R^2 em um aberto V de R^2 de classe C^∞. As coordenadas (X, Y) para p_0 são tais que $g(X,Y) = p_0$ e p_0 em V. Portanto, $f(p_0)=f(g(X,Y))$.

Por exemplo, seja $f(x,y) = 3x^2 - 4y^2$. Então f é uma função diferenciável e $p_0 = (0,0)$ é o único ponto crítico não-degenerado de f. Portanto, se considerarmos a mudança de coordenadas

$$x = \frac{X}{\sqrt{3}}\,, \qquad y = \frac{Y}{2}$$

vemos que f, nestas novas coordenadas, pode ser escrita como no item 2 do Lema de Morse, onde $c = 0$.

A seguir, apresentaremos uma aplicação do estudo feito.

Seja $f(x,y) = -4x^2 + 2xy - y^2$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = -8x + 2y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y$, então o único ponto crítico de f será $p_0 = (0,0)$, que se obtém ao resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} -8x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Além disso, temos que a matriz Hessiana de f avaliada nesse ponto será a seguinte:

$$H_f\,(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Com isso, temos que $\det H_f\,(0,0) = 16 - 4 = 12 \neq 0$, logo, $p_0 = (0,0)$ é ponto crítico não-degenerado. Pelo Lema de Morse, sabemos que existe um sistema de coordenadas de modo que f se escreve como uma das três formas quadráticas enunciadas no teorema.

De fato, ao considerar a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \dfrac{X}{\sqrt{4}} + \dfrac{\sqrt{4}\,Y}{4\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}Y \end{cases}$$

temos que $f(X,Y) = -X^2 - Y^2$. Em outras palavras, é possível eliminar o termo misto xy na expressão de f e expressá-la de uma forma mais simples.

Portanto, o gráfico da função, em uma vizinhança da origem, é como o da Figura 3 do Lema de Morse.

Conclusões

Com esse relatório, conseguimos entender melhor o Lema de Morse e suas aplicações, que eram os maiores objetivos.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora Ingrid Sofia Meza Sarmiento, pelo tempo e conhecimento dedicados a mim para o estudo do tema proposto na Iniciação Científica.

Agradeço também à Universidade Federal de Itajubá e à PIBIC – UNIFEI por tornar possível a realização desse Projeto de Iniciação Científica e pela bolsa concedida.

Referências

1. Lima, Elon Lages, *Curso de Análise vol.1*, ed.15. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
2. Lima, Elon Lages, *Curso de Análise vol.2*, ed.11. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
3. Matsumoto, Yukio, *An Introductionto Morse theory*, Translatedfromthe 1997 Japaneseoriginal by KikiHudson and Masahico Saito. TranslationsofMathematicalMonographs,**208**, 2002.