TEORIA ESPECTRAL DE OPERADORES LINEARES EM ESPAÇOS NORMADOS

Maria Luiza Torres Magalhães e Silva[1] (IC), Mariza Stefanello Simsen[1]
[1]*Universidade Federal de Itajubá.*

Palavras-chave: Resolvente e espectro de operadores. Propriedades espectrais. Autovalores e autovetores.

Introdução

A teoria espectral de operadores lineares é um dos principais ramos da Análise Funcional e suas aplicações. Ela está relacionada com a inversa de operadores, suas propriedades gerais e suas relações com o operador original. Tais operadores inversos aparecem naturalmente em questões para resolver problemas de equações diferenciais parciais e ordinárias, bem como na resolução de equações integrais. Muitos problemas em equações diferencias foram importantes no desenvolvimento desta teoria.

Apresentaremos uma introdução à teoria espectral de operadores lineares definidos em um espaço de Banach X e tomando valores em X. Abordaremos os conceitos de resolvente e espectro de operadores lineares limitados e algumas de suas propriedades espectrais gerais. Veremos que o conjunto dos autovalores de um operador linear compõem o espectro de tal operador. Faremos uma abordagem da teoria espectral de operadores definidos em espaços normados de dimensão infinita.

Conceitos preliminares

Nesta seção apresentaremos conceitos básicos que auxiliarão no entendimento dos resultados obtidos de nosso estudo.

Um espaço normado X é um espaço onde pode-se definir uma norma, a qual deve respeitar as seguintes propriedades:

(1) $||x|| \geq 0 \ \forall x \in X$
(2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(3) $||\alpha x|| = |\alpha| \ ||x|| \ \forall x \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
(4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \ \forall x,y \in X$

Um espaço de Banach B é um espaço normado completo, ou seja, temos que toda sequência de Cauchy converge.

Uma sequência em um espaço normado é de Cauchy quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo m, n > n_0 temos $||x_m - x_n|| < \varepsilon$.

Um operador linear de um espaço normado X é um operador T: D(T) → X com domínio D(T) ⊂ X tal que:

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x,y \in D(T)$$

Nosso estudo será voltado para esses operadores, a inversa deles e suas propriedades. Para isso relembraremos outros conceitos importantes que serão utilizados neste trabalho.

Um operador linear T é fechado se seu gráfico

$$G(T) = \{(x, y) \mid x \in D(T), y = T(x)\}$$

é fechado, ou seja, é igual ao seu fecho.

Um operador linear T é limitado se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$||Tx|| < c||x|| \ \forall x \in D(T)$$

Um autovalor λ de T, com T sendo um operador linear, é um número real tal que $Tv = \lambda v$. Chamamos v de autovetor de T associado a λ.

Algumas propriedades importantes que auxiliarão no estudo da Teoria espectral mais à frente:

Teorema 1. Seja X espaço vetorial (real ou complexo). Seja T: D(T) → X um operador linear com domínio D(T) ⊂ X e imagem R(T) ⊂ X. Então:

(a) O operador inverso T^{-1}: R(T) → D(T) existe se, e somente se, $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$.
(b) Se T^{-1} existe, então é um operador linear.

Lema 1. Seja T: D(T) → X um operador linear limitado com domínio D(T) ⊂ X, onde X é espaço normado. Então:

(a) Se D(T) é um subconjunto fechado de X, então T é fechado.
(b) Se T é fechado e X é completo, então D(T) é um subconjunto fechado de X.

Seja $X \neq \{0\}$ um espaço normado complexo e $T: D(T) \rightarrow X$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$, temos um operador associado a T que definiremos como sendo o operador, também linear, $T\lambda = T - \lambda I$, onde λ é um número complexo e I é o operador identidade em D(T).

Caso $T\lambda$ seja invertível, então sua inversa será dada pelo operador linear $R\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$, sendo este chamado de operador resolvente de T.

Um valor regular de T, denotado por λ, é um número complexo tal que:

(1) $R\lambda$ existe
(2) $R\lambda$ é limitado
(3) $R\lambda$ é definido em um conjunto que é denso em X

Assim, podemos definir o conjunto resolvente $\rho(T)$ como sendo o conjunto de todos os valores regulares de T. O seu complementar $\sigma(T)$ é chamado de espectro de T e se $\lambda \in \sigma(T)$, então chamamos λ de valor espectral de T.

O espectro pontual $\sigma p(T)$ é o conjunto tal que $R\lambda$ não existe. Se $\lambda \in \sigma p(T)$, então λ é autovalor de T. O espectro contínuo $\sigma c(T)$ é o conjunto tal que $R\lambda$ existe, está definido num conjunto denso em X, mas não é limitado (satisfaz (3), mas não satisfaz (2)). O espectro residual $\sigma r(T)$ é o conjunto tal que $R\lambda$ existe, mas não está definido num conjunto denso em X (não satisfaz (3)).

Notemos que no caso de dimensão finita temos $\sigma c(T) = \sigma r(T) = \emptyset$. Logo, o espectro nesse caso é formado apenas pelos autovalores.

Resultados e discussão

Nesta seção traremos alguns resultados básicos, incluindo teoremas e lemas, sobre a Teoria Espectral de operadores lineares em espaços normados, a partir do estudo do conjunto resolvente $\rho(T)$ e do conjunto do espectro $\sigma(T)$.

Lema 2. Seja X um espaço complexo de Banach, $T: X \rightarrow X$ um operador linear e $\lambda \in \rho(T)$. Assumindo (a) T é fechado ou (b) T é limitado. Então $R\lambda$ é definido em todo o espaço X e é limitado.

O Lema 2 traz informações sobre o operador T e auxilia a encontrar informações sobre o operador $R\lambda$, o qual é o nosso foco de estudo. Além de sua importância na busca de dados sobre $R\lambda$, ele também é um grande auxiliar nas demonstrações de muitos teoremas sobre a Teoria Espectral e será útil para um melhor entendimento dos conceitos que serão mostrados.

Seja B(X, X) o conjunto de todos os operadores lineares limitados $T: X \rightarrow X$. Então podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2. Seja $T \in B(X, X)$, onde X é um espaço de Banach. Se $\|T\| < 1$, então $(I - T)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado em todo espaço X. Além disso, temos que

$$(I - T)^{-1} = \Sigma\, T^j = I + T + T^2 + \ldots$$

com a série sendo convergente na norma em B(X, X).

O Teorema 2 é a base de muitos conceitos. E como a primeira aplicação desse teorema, temos que a prova do próximo teorema é dada por ele.

Teorema 3. O conjunto resolvente $\rho(T)$ de um operador linear limitado T no espaço de Banach complexo X é aberto. E, portanto, o espectro $\sigma(T)$ é fechado.

É por conta da demonstração do Teorema 3 que conseguimos obter uma representação para o resolvente através de séries. Esta representação é enunciada no seguinte teorema:

Teorema 4. Para X e T definidos assim como no Teorema 3 e para todo $\lambda_0 \in \rho(T)$, o operador $R\lambda$ pode ser representado como:

$$R\lambda = \Sigma\, (\lambda - \lambda_0)^j\, (R\lambda_0)^{j+1}$$

com a série à direita sendo absolutamente convergente para todo λ no disco aberto dado por:

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R\lambda_0\|}$$

no plano complexo. Esse disco é um subconjunto de $\rho(T)$.

E como uma outra aplicação do Teorema 3, temos o próximo teorema, que traz o importante fato de que para um operador linear limitado, o espectro é um conjunto limitado no plano complexo:

Teorema 5. O espectro $\sigma(T)$ de um operador linear limitado $T: X \rightarrow X$ no espaço de Banach complexo X é compacto e está no disco dado por:

$$|\lambda| \leq \|T\|$$

E daí segue que o conjunto resolvente $\rho(T)$ não é vazio.

Conclusões

Assim, temos que dado algum ponto do conjunto resolvente $\rho(T)$ é possível encontrar uma representação de $R\lambda$, escrevendo este operador como uma série convergente. E, ainda mais, se o operador T for fechado ou limitado, podemos afirmar que $R\lambda$ está definido em todo o X e é limitado.

Por fim, conclui-se que o espectro no caso de o espaço ter dimensão infinita não é formado somente pelos autovalores do operador dado, diferente do caso onde o espaço tem dimensão finite, pois nem sempre temos que as propriedades (1), (2), (3) acontecem. Mas mesmo considerando que elas não ocorrem, é possível tirar diversos resultados interessantes, assim como vistos na seção anterior.

Agradecimentos

Agradeço imensamente a minha famíia por todo apoio em todos os momentos.
Agradeço minha orientadora, sempre muito atenciosa e paciente durante nossos encontros.
Agradeço a Universidade Federal de Itajubá por todas as oportunidades que modelaram a minha vida.
Agradeço a FAPEMIG pela oportunidade de poder fazer essa pesquisa.

Referências

[1] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. John Wiley & Sons, 1991.

[2] DE OLIVEIRA, César R. **Introdução à análise funcional**. Projeto Euclides. Impa, 2010.