Transformações Integrais e Aplicações em Equações Diferenciais

Pedro Afonso Costa Fraga[1] (IC), Denis de Carvalho Braga (PQ)[1]
[1]*Universidade Federal de Itajubá.*

Palavras-chave: Análise complexa. Equações diferenciais ordinárias. Equações diferenciais parciais.

Introdução

O presente trabalho se fundamenta na teoria das transformações integrais cuja primeira utilização sistemática foi feita pelo matemático suíço L. Euler (1707-1783) com o objetivo de resolver equações diferenciais de um certo tipo. Desde a introdução desse conceito na matemática foram feitos diversos aprimoramentos e generalizações e, mesmo nos dias atuais, ainda é uma ferramenta amplamente utilizada para os mais diversos propósitos como, por exemplo, na tomografia computadorizada mediante a transformada de Radon que fornece uma base matemática para esses estudos. Modernamente, toda transformação integral T assume a seguinte forma

$$T(f(t),z) = F(z) = \int_a^b K(z,t)f(t)dt,$$

onde a entrada do operador integral T é feita pela função f e a saída é a função F. A função $K = K(z,t)$ é chamada de núcleo (ou *kernel*) da transformação e essencialmente determina como o operador T transforma um espaço de funções em outro. O intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ é importante, pois determina condições de existência da transformação após a escolha do *kernel*. Vale destacar que o intervalo pode ser ilimitado (como a própria reta real).

Neste trabalho apresentamos três transformações integrais clássicas na literatura e suas aplicações, sendo elas a transformada de Laplace, a transformada de Fourier e a transformada de Mellin. Cada transformação integral possui um espaço de funções adequado, cuja existência nos permite recuperar a função transformada através da transformada inversa correspondente. Apresentamos em seguida os respectivos espaços funcionais, a definição das transformações integrais e suas transformações inversas.

Iniciamos com a transformada de Laplace [1]. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto de todos os números reais não negativos e F_c o conjunto das funções $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tais que:

1. f possui um número finito de descontinuidades em $[0,b]$ para cada $b > 0$;
2. f possui limites laterais à esquerda e à direita para todos os pontos de $t \in \mathbb{R}^+$;
3. Existem $c, D \in \mathbb{R}$, com $D > 0$, tais que
$$|f(t)| \leq De^{ct}, \ \forall t > 0.$$

Definição 1. Dada uma função $f \in F_c$, definimos a transformada de Laplace F de f por

$$F(z) = L(f,z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt.$$

Note que o *kernel* é dado por $K(z,t) = e^{-zt}$.

Teorema 1. Se $f \in F_c$ é de classe C^1, então para cada $t \in \mathbb{R}^+$, temos que

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} 1/(2\pi i) \int_{\gamma_R} e^{zt} F(z)dz,$$

onde a curva $\gamma_R: [-R,R] \to \mathbb{C}$ é dada por $\gamma_R(y) = x + iy$ para qualquer $x > c$.

Agora trataremos da transformada de Fourier [5].

Definição 2. (Espaço de Schwartz) O espaço de Schwartz, denotado por $S(\mathbb{R})$, é constituído pelas funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis tais que

$$\sigma_{m,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m f^{(n)}(x) \right| < +\infty$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 3. Seja $f \in S(\mathbb{R})$. A transformada de Fourier da função f é definida por

$$F(z) = F(f,z) = \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi izt} f(t)dt.$$

Teorema 2. Se $f \in S(\mathbb{R})$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos a transformada inversa de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi ity} F(y)dy.$$

Por fim, temos a transformada de Mellin [3]. Sejam $\mathbb{R}_0$ o conjunto de todos os números reais positivos e

$L^1(\mathbb{R}_0)$ o espaço de todas as funções (Lebesgue) mensuráveis $f: \mathbb{R}_0 \to \mathbb{C}$ à valores complexos, com norma finita

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}_0)} := \int_{\mathbb{R}_0} |f(u)|\, du < +\infty.$$

Definição 4. Se $x^{z-1}f(x) \in L^1(\mathbb{R}_0)$ para algum $z \in \mathbb{C}$, a transformada de Mellin de f é definida por

$$F_M(z) = M(f(x), z) := \int_0^\infty x^{z-1}\, f(x) dx.$$

Teorema 3. Se $F_M \in L^1(\{c\} \times i\mathbb{R})$, então a transformada inversa de Mellin é dada por

$$f(x) = M^{-1}(F_M(z), x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_M(z) x^{-z} dz.$$

A partir disso, é possível demonstrar propriedades operacionais, o comportamento e teoremas relacionados a cada transformada. Munidos dessa construção, apresentamos algumas aplicações menos conhecidas e relevantes dessas transformações. E, por fim, aplicamos um método alternativo para a resolução de certas equações diferenciais parciais clássicas baseado na transformada de Laplace e na ampla utilização do Teorema da Inversão pelos Resíduos, conforme [1]. Destacamos que o nosso trabalho se volta majoritariamente para as aplicações em equações diferenciais sob o uso da transformada de Laplace, com o objetivo de generalizar uma ideia exposta em [9], de tal forma que para as demais transformadas estudadas possamos empregar outras aplicações além do escopo de equações diferenciais que já são abundantes na literatura sobre o tema. Veja, por exemplo, [1], [2], [4], [7] e [8]. Uma breve descrição da ideia da generalização citada é mostrada adiante através da equação do calor.

Metodologia

A metodologia empregada foi o estudo individual utilizando referências bibliográficas convenientes ao objetivo proposto e seminários semanais com o orientador para esclarecimentos, sugestões sobre algum tópico e dúvidas sobre a demonstração de algum resultado pertinente ao tema de estudo.

Resultados e discussão

Foi obtida inicialmente uma certa familiaridade com o tema ao ler distintas fontes, ao focar em apenas três transformadas integrais e comparar as diferentes abordagens para introduzir esses conceitos. Pelas fontes empregadas, nota-se claramente que há teorias mais desenvolvidas sobre algumas transformadas integrais do que outras. Em nosso trabalho isso se mostra evidente através da transformada de Mellin, onde foi encontrada apenas uma fonte [3] mais rigorosa e profunda que se ocupa de estabelecer bases seguras, enquanto para as demais transformadas encontram-se facilmente referências com teorias bem estabelecidas (veja [1], [5] e [8]).

Os principais resultados estudados estão relacionados com a transformada de Laplace, como uma versão mais geral sobre o Teorema do Valor Final. O Teorema do Valor Final é geralmente enunciado da seguinte forma [9].

Teorema 4. Se f é de classe C^1 e o limite $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, então

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{z\to 0} zF(z).$$

Mas esse teorema não é válido para funções como o seno e o cosseno, devido ao limite no infinito não existir. Por exemplo, para a função seno,

$$\lim_{z\to 0} zF(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z^2+1} = 0.$$

Com o propósito de abarcar esses casos, enunciamos primeiramente o seguinte resultado.

Proposição 1. Se $f \in CP(\mathbb{R}^+)$ e o limite $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, então

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{x\to\infty} (1/x) \int_0^x f(t) dt,$$

sendo $CP(\mathbb{R}^+)$ o conjunto das funções contínuas por partes em $\mathbb{R}^+$.

Note que, para essa média, ao calcular para a função $f(t) = \text{sen}(t)$, obtemos

$$\lim_{x\to\infty} (1/x) \int_0^x \text{sen}(t) dt = \lim_{x\to\infty} \big(1 - \cos(x)\big)/x = 0,$$

que coincide com o limite calculado anteriormente. E, assim, temos o seguinte.

Teorema 5. Se $f \in F_c$ e existe o limite $\lim_{x\to\infty} (1/x) \int_0^x f(t) dt$, então

$$\lim_{x\to\infty} (1/x) \int_0^x f(t) dt = \lim_{z\to 0} zF(z).$$

Essa abordagem por exemplo já abarca uma vasta gama de funções que o Teorema 4 não é capaz de fornecer informações, como exemplificado com a função seno anteriormente.
Também destacamos o método feito para a resolução de certas equações diferenciais parciais clássicas, a saber, a equação do calor e a equação da onda, através da formula de inversão em função dos polos para a transformada de Laplace [1]. Considere, por exemplo, a equação do calor unidimensional (na barra de comprimento L) $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ com condições de Dirichlet homogêneas, isto é, $u(t,0) = u(t,L) = 0$, $t > 0$, e condição inicial dada por $u(0,x) = f(x)$, $f \in C^0$. Podemos aplicar a transformada de Laplace na variável t, o que é justificado devido ao trabalho já realizado na literatura sobre essa equação diferencial parcial [2]. Fazendo isto, e utilizando as propriedades desta transformada, obtemos uma equação diferencial ordinária não homogênea com respeito a variável x, dada por

$$U_{xx}(z,x) - z/\alpha\, U(z,x) = -f\,(x)/\alpha,$$

para cada z no domínio. Resolvendo juntamente com as condições de contorno, obtemos uma expressão para a função $U = U(z,x)$ e, em seguida, empregamos o seguinte resultado que diz respeito a inversão da transformada de Laplace [1].

Teorema 6. Seja $f \in F_c$ de classe C^1. Suponha que:
1) F é meromorfa e possui uma quantidade enumerável de polos;
2) Existem constantes $K, b, R > 0$ tais que

$$|F(z)| \leq K/(|z^b|), \text{ para } |z| > R.$$

Então, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, temos

$$f(t) = \sum_{p \in P} \operatorname{Res}\,(F(z)e^{zt}, p),$$

onde P é o conjunto dos polos da função F.

Após os cálculos e simplificações, encontramos

$$u(t,x) = \sum_{n \geq 1} D_n \operatorname{sen}((n\pi x)/L) e^{-(n\pi\alpha)^2 t/L^2},$$

onde

$$D_n = (2/L) \int_0^L f\,(y) \operatorname{sen}((n\pi y)/L) dy,$$

que corresponde a solução da equação diferencial parcial conhecida na literatura. De modo análogo, podemos empregar outras condições de contorno já conhecidas para a equação do calor e para a equação da onda, seguindo o que foi descrito anteriormente.

Conclusões

Quanto à última parte desenvolvida no trabalho, para a resolução de equações diferenciais parciais clássicas através da transformada de Laplace, há um potencial de aplicação dos resultados em outros tipos de equações diferenciais parciais lineares mais gerais e distintas daquelas aqui estudadas, claramente com as devidas modificações. Outra possibilidade é se para outras transformações integrais é possível uma estratégia semelhante. Finalizando, este estudo proporcionou um conhecimento mais profundo na teoria das transformações integrais e com um panorama sobre suas vantagens e limitações.

Agradecimentos

A FAPEMIG, pela bolsa e pela oportunidade, e a Universidade Federal de Itajubá. Agradeço ao meu orientador pela paciência.

Referências

[1] Barrera, Luis; Valls, Claudia. **Complex analysis and differential equations**. Springer, 2009.

[2] Boyce, William; DiPrima, Richard. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A, 1979.

[3] Butzer, Paul; Jansche, Stefan. **A direct approach to the Mellin transform**. The journal of Fourier analysis and applications. n. 3, p. 325-376, 1997.

[4] Debnath, Lokenath; Bhatta, Dambaru. **Integral transforms and their applications**. CRC Press, 2015.

[5] Fernández, Adán; Cavalcante, Marcos. **Introdução à análise harmônica e aplicações**. Rio de Janeiro: Impa, 2009.

[6] Lima, Elon Lages. **Análise Real:** Funções de uma variável. 12.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013.

[7] Ostberg, Donald; Perkins, Fred. **An introduction to linear analysis**. Addison-Wesley, 1966.

[8] Smith, M. G. **Laplace transform theory**. D. Van Nostrand Company, 1966.

[9] Spiegel, Murray. **Transformadas de Laplace**. Rio de Janeiro: Mcgraw-Hill do Brasil, 1971.