

TEORIA DE MORSE E APLICAÇÕES EM MECÂNICA

Luís Gustavo Sampaio Bueno¹ (IC), Lucas Ruiz dos Santos (PQ)¹

¹Instituto de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá.

Palavras-chave: Configurações Centrais. Estabilidade. Índice de Morse. Problema de N Corpos. Simetria

Introdução

Na sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, impulsionado pelo estudo do movimento planetário ao redor do Sol, Sir Isaac Newton resolveu o que atualmente denominamos como o Problema de 2 Corpos, com interação gravitacional. A busca por soluções abrangentes desse problema tem inspirado matemáticos e físicos por séculos, catalisando o progresso em campos amplos como a Mecânica Celeste e a Física-Matemática em geral (FERNANDES, 2011).

As subsequentes generalizações, emergentes após séculos do estudo de Newton, em sua maioria se concentraram em ajustes do potencial gravitacional e na introdução de potenciais específicos. Tais generalizações tipicamente têm raízes em fundamentos físicos. Contudo, generalizações abrangendo potenciais com leis de potência mais amplas surgiram mais recentemente, predominantemente com uma motivação matemática.

A solução abrangente do Problema de N-Corpos (PNC) permanece um desafio em aberto. O que temos até o momento são soluções particulares obtidas após algumas hipóteses restritivas. Uma área de exploração bem estabelecida nesse âmbito é o estudo das Configurações Centrais (CC). Dizemos que N corpos estão em uma configuração central quando a aceleração de cada corpo é proporcional à posição desse corpo em relação ao centro de massa do sistema.

Este trabalho tem como propósito a análise dos principais elementos da Teoria de Morse, do Problema de N Corpos e das Configurações Centrais. Uma análise mais ampla também é realizada com foco na existência de Configurações Centrais Simétricas (CCS), e, de modo central, uma tentativa de decifrar o comportamento do índice de Morse em famílias de CCS.

Como mencionado, a formulação geral do Problema de N Corpos é obtida pela generalização do problema clássico, isto é, substituindo o potencial gravitacional por um potencial genérico. Especificamente, nos dedicamos ao cenário onde o potencial é modelado por

uma função homogênea. Após a generalização do potencial newtoniano para uma lei de potências arbitrária A , Hampton (2019) explora a ligação entre a Teoria de Morse e o PNC. O autor calcula o índice de Morse para polígonos regulares, buscando estabelecer conexões entre a geometria dos polígonos e o índice de Morse das configurações centrais correspondentes. (SAMPAIO BUENO; RUIZ, 2022).

Por último, baseamo-nos em Montaldi (2015) e Fernandes et al. (2021) para desenvolver um algoritmo no software Mathematica® que compute o índice de Morse para conjuntos de CCS, construímos uma série de exemplos que buscam elucidar alguns detalhes técnicos de Montaldi (2015) e também tentamos explorar com mais detalhes o comportamento desse índice.

Metodologia

Dados N corpos descritos pelo vetor posição $q = (q_1, \dots, q_N)$ dizemos que esses corpos estão em configuração central se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\ddot{q} = \lambda q$$

Segundo Fernandes (2011) uma importante ferramenta para determinar se uma dada configuração não colinear é ou não uma configuração central são as chamadas equações de Andoyer, tais equações estão descritas na equação:

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{ij}) \Delta_{ijk} = 0$$

onde $R_{ij} = |q_i - q_j|^{-3} = R_{ji}$ e Δ_{ijk} é duas vezes a área com sinal do triângulo formado pelas posições das massas de índices i, j e k . Ainda em Fernandes (2011) demonstra-se que:

Teorema 1: Uma dada configuração de massas não

colinear é uma CC se, e somente se cada f_{ij} é nulo.

Nesse sentido, as equações de Andoyer são equivalentes às equações de configurações centrais. Baseados em Fernandes (2011), em nosso trabalho, recorreremos a tais equações para demonstrar que a única configuração central de três corpos, não colinear, é o triângulo equilátero, com massas arbitrárias em seus vértices.

Dada uma função duas vezes diferenciáveis, o índice de Morse da função é o número de autovalores negativos de sua matriz Hessiana (MILNOR, 1963). O Teorema de Clairaut pode ser usado nesse contexto:

Teorema 2: Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Dessa forma, a matriz Hessiana de f , cujas componentes são as derivadas segundas, é uma matriz simétrica e, portanto, diagonalizável. Caso a Hessiana não tenha nenhum autovalor nulo em nenhum de seus pontos críticos, f é denominada **função de Morse**, nesse caso, o número de autovalores negativos que ocorrem na sua forma diagonalizada, em um dado ponto crítico é o índice de Morse de f nesse ponto.

Não é completamente claro o quanto o índice de Morse afeta o comportamento dinâmico das órbitas vizinhas às configurações centrais, contudo quando o índice de Morse é nulo para a função f , há a existência de um mínimo local, além disso, a nulidade do índice sugere estabilidade linear das órbitas. (HAMPTON, 2019).

Como já citado, Hampton (2019) se preocupa em calcular o índice de Morse para a função definida pela equação:

$$f = \frac{MI}{2} + \frac{U}{A-2},$$

onde M é a massa total do sistema, I o momento de inércia total, U é o potencial e A é um parâmetro real. Note que $I = I(q_1, \dots, q_n)$ e $U = U(q_1, \dots, q_n)$.

Demonstramos no trabalho que os pontos críticos de f são CC do problema usado na construção da função.

Considere agora um conjunto de N pontos em \mathbb{R}^d , digamos $C = \{x_1, \dots, x_N\}$, munido de uma função massa, que associa a cada $x \in C$ um único número real positivo $m(x)$. A dupla (C, m) é chamada de **configuração**. Considere agora o conjunto de todas as transformações ortogonais em \mathbb{R}^d , denotado por $O(d)$.

Definição 1: Seja $G < O(d)$ finito (G subgrupo finito de $O(d)$). Se uma dada configuração (C, m) é invariante por G , i.e., $G \cdot C = C$ e, além disso $g \cdot m = m$, dizemos que tal configuração é uma **configuração simétrica**.

Seja $G < O(d)$ finito. As configurações simétricas têm a forma $C^G := \text{Fix}(G, C)$, ou seja, o conjunto C^G denota as configurações simétricas obtidas a partir da ação de G sobre C , i.e., simétricas com respeito à ação em questão, no sentido da Definição 1.

Definição 2: Seja C uma configuração e $G < O(d)$ finito. Dado $x \in C$, chamamos de **órbita** de x o conjunto $Gx = \{gx \in \mathbb{R}^d; g \in G\}$.

Chamaremos de *tipo de órbita* de uma dada órbita a classe de conjugação dos subgrupos de isotropia de um ponto. Dado $H < G$, denotaremos a classe de conjugação contendo H por (H) , portanto, dado um subgrupo de isotropia Gx , denotaremos o tipo de órbita de x como (Gx) . Para um dado conjunto de índices $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, chamamos de órbitas de *tipo topológico de Burnside* as distintas componentes conexas do conjunto das órbitas de tipo (H) , $(H)^{(\alpha_1)}$, $(H)^{(\alpha_2)}$, etc.

O seguinte resultado é o resultado principal de Montaldi (2015).

Teorema 3: Seja G um subgrupo finito de $O(d)$ e Γ um tipo topológico de Burnside de G . Então existe pelo menos uma configuração central em cada componente conexa.

Resultados e discussão

O Exemplo 1 mostra como funciona a classificação do tipo topológico de Burnside, para uma configuração de 8 corpos no plano.

Exemplo 1: Considere $G = (\mathbb{Z}_2)^v \oplus (\mathbb{Z}_2)^h$. Seja $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \subset \mathbb{R}^2$, como abaixo:

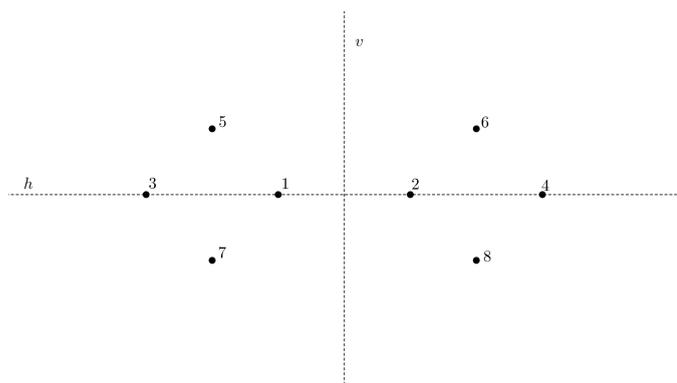


Figura 1 – Esquema da Configuração

Temos $\Gamma = 0(\mathbb{Z}_2)^v + 2(\mathbb{Z}_2)^h + 1I$. As configurações formadas pelos corpos 1,2 e 3,4, são fixas pela ação de $(\mathbb{Z}_2)^h$, a configuração formada pelos corpos 5,6,7 e 8 são fixas somente pela identidade.

Um dos nossos objetivos é estudar como ocorre a variação do índice de Morse se estudamos uma família de configurações centrais simétricas, i.e., dada uma CCS, o que acontece se forem impostas perturbações nas posições dos corpos e em suas massas, mantendo a simetria inicial? Era esperado que só houvesse variação no índice se trocássemos de uma componente conexa para outra, ou seja, se houvesse colisão.

Uma gama de exemplos não nos mostrou uma lei geral que dite a variação do índice de Morse em famílias de CCS. Vejamos esses exemplos. Antes é importante ressaltar que todos os cálculos foram feitos para o potencial gravitacional Newtoniano, sempre considerando que as massas são estritamente positivas.

Para um triângulo equilátero, é demonstrado em Fernandes (2011) que a configuração associada sempre é central, independentemente das massas assumidas pelos corpos nos vértices do triângulo. Nesse caso, o índice de Morse é positivo, para massas iguais, e demonstramos que, mesmo com massas arbitrárias, não existem autovalores negativos, o que leva à nulidade do índice.

À configuração descrita acima, ao adicionar um corpo no centro de massa do sistema, o índice de Morse apresenta variação, apresentando índice 2 e até 3, com massas positivas.

Para o quadrado, sem massa no centro, o índice é constante e igual a zero. Com massa no centro existe variação.

Para o losango, a variação ocorre como mostrada na Figura 2. Para o losango de vértices tracejado vermelho, temos índice de Morse igual a 1. Na configuração crítica em preto, um autovalor anteriormente negativo, troca de sinal, este autovalor fica nulo, para a troca de sinal, e a função não é função de Morse nesse instante. O losango azul é um exemplo com índice zero.

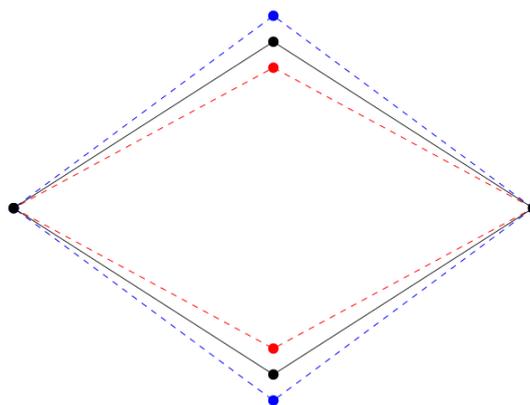


Figura 2 – Esquema da Família de Configurações)

Para o losango com corpo no centro de massa, o problema se torna complexo, sendo que todos os exemplos que encontramos têm índice igual a 1.

Para o pentágono, sem massa central, o índice é zero. Com massa central o índice apresenta variação como função da massa central, assim como mostra a Figura 3:

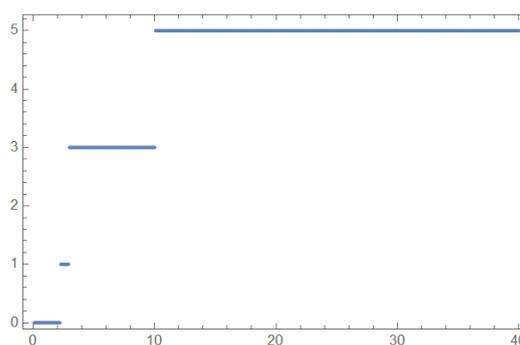


Figura 3 – Índice de Morse pentágono com massa central

Para o hexágono e heptágono, sem massa no centro, o índice é nulo. Já para o octógono, também sem massa central, o índice é igual a 3.

Os índices encontrados nos resultados apresentados acima estão em acordo com os resultados de Hampton (2019).

Além dos resultados para polígonos, com ou sem massa

no centro, estendemos os cálculos para configurações do tipo encaixadas. Vejamos os resultados para dois triângulos equiláteros encaixados. A configuração está representada na Figura 4.

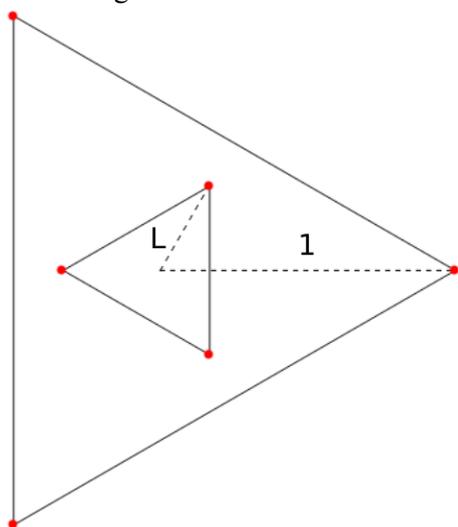


Figura 4 – Configuração de 6 corpos em triângulos equiláteros encaixados

Nesse exemplo, para cada razão de massas fixada, encontramos pelo menos um comprimento L que dá a disposição das massas nos vértices dos triângulos. O comportamento dessa função descreve as configurações existentes para essa família. Na Figura 5 exploramos o comportamento do índice de Morse como função do comprimento.

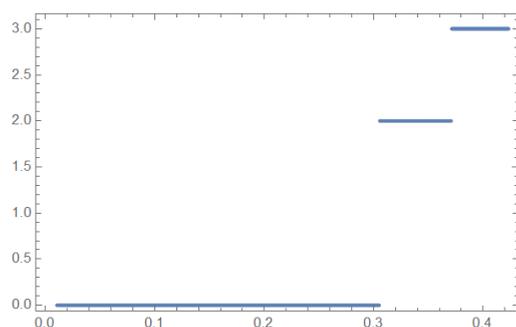


Figura 5 – Índice de Morse para a configuração

Conclusões

Diante dos resultados apresentados concluímos que o comportamento do índice, embora de extrema relevância para um estudo da dinâmica de um sistema, ainda não é bem entendido e apresenta comportamento pouco intuitivo.

Agradecimentos

Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal de Itajubá (PIBIC/UNIFEI) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Referências

FERNANDES, Antônio Carlos. **Sobre configurações centrais do problema de n-corpos. Configurações centrais planares, espaciais e empilhadas.** 2012. 132 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

FERNANDES, Antônio Carlos et al. **Central configurations of the five-body problem with two isosceles triangles.** Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, p. 1-18. 2021.

HAMPTON, Marshal. **Planar N-body central configurations with a homogeneous potential.** Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, p. 1-27, ago. 2019.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica Analítica.** 2. ed. Livraria da Física, 2007.

MILNOR, J. **Morse Theory.** Princeton University Press, 1963.

MONTALDI, J. **Existence of symmetric central configurations.** Celestial Mechanics And Dynamical Astronomy, v. 122, n. 8, p. 405-418, nov. 2015.

PALAI, Richard S. **The Principle of Symmetric Criticality.** Communications In Mathematical Physics, v. 69, n. 4, p. 327-360, nov. 1979.

SAMPAIO BUENO, Luís Gustavo; RUIZ, Lucas S. **Propriedades das Configurações Centrais nos Problemas de Maxwell e N Vórtices.** V Simpósio de Iniciação Científica da Unifei, Itajubá, v., n. 20, p. 327-331, nov. 2022.