VI Simpósio de Iniciação Científica 2023
Ciência como ferramenta de transformação da sociedade

UMA INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS

Flávia Alessandra Benício Costa[1] (IC), Bráulio Augusto Garcia (PQ)[1]
[1] *Universidade Federal de Itajubá*

Palavras-chave: Aplicações no Círculo. Difeomorfismo Morse-Smale. Ponto Periódico. Sistema Estruturalmente Estável. Sistemas Dinâmicos.

Introdução

Um sistema dinâmico é uma aplicação, chamada dinâmica, definida num conjunto M assumindo valores em M, dito espaço de fase. Os primórdios dessa teoria podem ser identificados já no século XVI com os trabalhos de Isaac Newton. No século XIX, essa versão moderna foi feita por Henri Poincaré, após introduzir muitos dos aspectos qualitativos das equações diferenciais, bem como os conceitos de estabilidade e periodicidade das soluções, veja Robert L. Devaney (2003).

Neste trabalho apresentaremos alguns conceitos básicos em dinâmica como pontos periódicos, transitividade, hiperbolicidade e conjugações topológicas. Definidos e exemplificados a seguir, para mais detalhes veja Robert L. Devaney (2003) e Luis Barreira (2012).

Definição 1. *Dizemos que um ponto x_0 é um* ***ponto fixo*** *de f se $f(x_0) = x_0$.*

Exemplo 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x(1-x)$. Temos que 0 e $\frac{1}{2}$ são pontos fixos de f, pois $f(0) = 0$ e $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.*

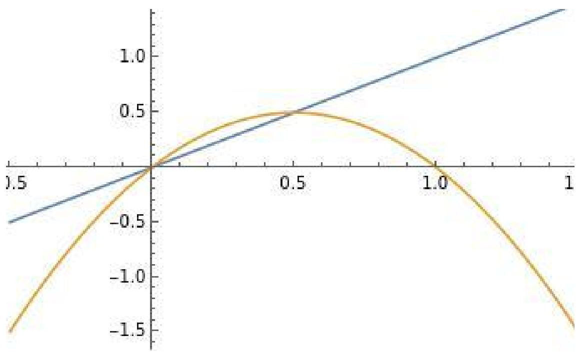

Figura 1 – Gráfico da função $f(x) = 2x(1-x)$

Definição 2. *Dizemos que um ponto x_0 é um* ***ponto periódico de período*** *n se $f^n(x_0) = x_0$, onde n chamado* ***período de*** *x_0, é o menor inteiro com essa propriedade.*

Exemplo 2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Temos que 1 é ponto fixo e $\frac{1}{x}$, com x diferente de 0 e 1, é ponto periódico de período 2, pois $f^2(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = x$.*

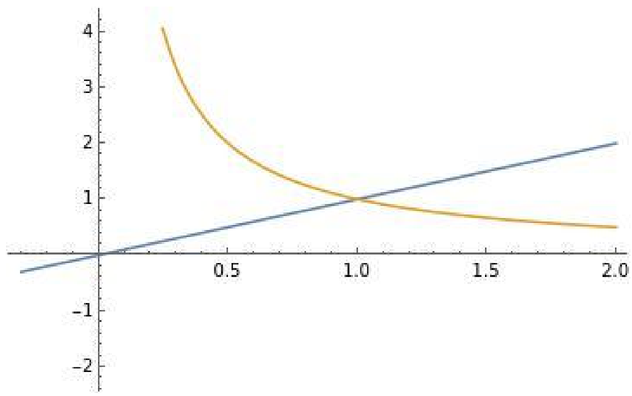

Figura 2 – Função $f(x) = \frac{1}{x}$

Definição 3. *Denotamos o conjunto dos pontos fixos de f por $Fix(f)$ e o conjunto dos pontos periódicos de período n por $Per_n(f)$.*

Definição 4. *Dizemos que um ponto x_0 é* ***ponto fixo hiperbólico*** *se for ponto fixo e $|f'(x_0)| \neq 1$.*

Definição 5. *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre dois espaços métricos é chamada de* ***homeomorfismo*** *se f for uma função bijetora contínua, e sua inversa f^{-1} também for contínua.*

Definição 6. *Dizemos que o conjunto dos pontos $O^{+}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \cdots\}$ é uma* ***órbita direta*** *de x. Se f é um homeomorfismo, então definimos a* ***órbita completa de*** *x, denotada por $O(x)$, como o conjunto de pontos $f^n(x)$, para $n \in \mathbb{Z}$. E a* ***órbita inversa*** *de x como o conjunto dos pontos $O^{-}(x) = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \cdots\}$.*

Definição 7. *Dizemos que uma aplicação $f : X \to X$ é* ***topologicamente transitiva*** *se existe $x \in X$ tal que $O(x)$ é denso em X.*

Proposição 1. *Uma aplicação $f : S^1 \to S^1$ é topologicamente transitiva se, e somente se, para todo par de abertos não vazios $U, V \subset S^1$ existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f^k U \cap V \neq \emptyset$.*

Definição 8. *Dizemos que duas aplicações $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são* ***topologicamente conjugadas*** *se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ satisfazendo $hof = goh$. Em outras palavras, queremos que o diagrama abaixo comute.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \mathbf{X} \arrow[d, "h"] \\ \mathbf{Y} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

Figura 3 – Dinâmicas conjugadas

Definição 9. *Chamamos o homeomorfismo h de* ***conjugação topológica*** *entre f e g.*

Definição 10. *Seja a aplicação $f : S^1 \to S^1$. Dizemos que f é um* ***difeomorfismo***, *se f for um homeomorfismo diferenciável cuja inversa f^{-1} também é diferenciável.*

Notação: Denotamos o conjunto de todos os difeomorfismos do círculo nele mesmo como $Diff^1(S^1)$, onde é preservada a sua orientação.

Definição 11. *Seja um ponto fixo x de um difeomorfismo $f \in Diff^1(S^1)$. Se $f'(x) < 1$, dizemos que este ponto fixo é um* ***atrator***. *Se $f'(x) > 1$, dizemos que este ponto fixo é um* ***repulsor***.

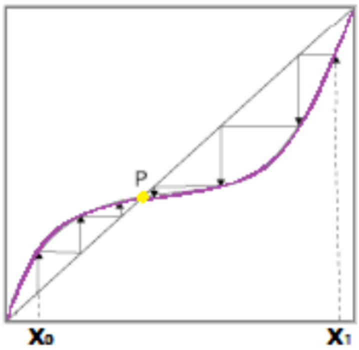

Figura 4 – P é ponto fixo hiperbólico atrator

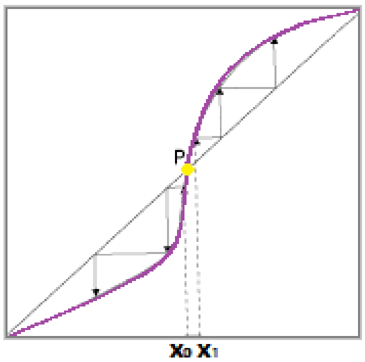

Figura 5 – P é ponto fixo hiperbólico repulsor

Por fim, o cerne do trabalho, apresentado nos resultados desta pesquisa, é estudar a dinâmica dos difeomorfismos do círculo conhecidos como Morse-Smale e sua relação com os difeomorfismos estáveis. Ou seja, mostrar que os difeomorfismos Morse-Smale são estruturalmente estáveis e depois mostrar se a recíproca é verdadeira, para mais detalhes, consultar obras dos brasileiros

(ABDENUR e FRANÇA, 2007; FRANÇA, 2008).

Metodologia

A metodologia deste trabalho foi feita perante reuniões, entre orientador e orientanda, para se discutir sobre a leitura de materiais como livros, dissertações e artigos dos autores das referências.

Resultados e discussão

Os principais resultados foram obtidos através do conceitos da métrica no espaço das aplicações do círculo, de estabilidade estrutural da dinâmica frente a perturbações e de um invariante por conjugação topológica, este último conhecido como número de rotação de Poincaré.

Definição 12. *Sejam $f, g \in Diff(S^1)$. Definimos a* ***distância*** *C^1 por:*

$$d_1(f,g) \equiv sup\{max\{d_{S^1}(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|\}\}$$

Ou seja, dois difeomorfismos f e g estão próximos se os gráficos e as derivadas de f e g estão próximas em todos os pontos do círculo.

As definições a seguir são o cerne do trabalho. Na primeira vamos definir o que é uma perturbação. Na segunda, o que é uma aplicação estruturalmente estável. E na terceira, vamos definir o que é um difeomorfismo Morse-Smale. A partir de então, através de conceitos como levantamento e número de rotação (com o qual é possível caracterizar as dinâmicas do círculo de acordo com a sua racionalidade ou irracionalidade na reta real) podemos entender as proposições que nos levaram às conclusões principais.

Definição 13. *Dizemos que f é $C^1 - \epsilon$-próxima de g se $d_1(f,g) < \epsilon$. Dizemos então que g é uma* ***perturbação*** *de f.*

Definição 14. *Seja uma aplicação $f : S^1 \to S^1$. Definimos que f é* ***(C^1-)estruturalmente estável****, se existe $\epsilon > 0$ tal que toda $g : S^1 \to S^1$ que está C^1-ϵ-próxima de f é topologicamente conjugado a f.*

Exemplo 3. *Na figura 6, temos duas aplicações ϵ-próximas mas não conjugadas, visto que o ponto fixo desparece por um lado e bifurca em dois pontos fixos pelo o outro.*

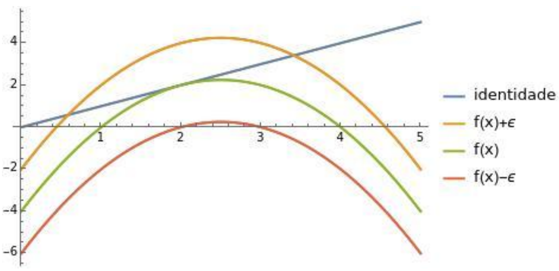

Figura 6 – Gráfico das aplicações ϵ-próximas de f

Definição 15. *Dizemos que um difeomorfismo de S^1 é Morse-Smale se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. f possui pontos periódicos.

2. Todo ponto periódico de f é hiperbólico.

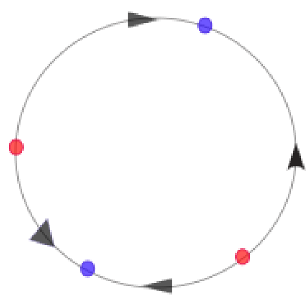

Figura 7 – Um difeomorfismo Morse-Smale

Definição 16. *Sejam as aplicaçõe contínuas $f : S^1 \to S^1$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que F é um* ***levantamento*** *de f se satisfaz a conjugação topológica $\pi o F = f o \pi$, onde $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ é a projeção de $\mathbb{R}$ em S^1 dada por $\pi(x) = x(mod 1)$.*

Definição 17. *Sejam f uma aplicação e F seu levantamento. Dizemos que $\rho(f)$ é o* ***número de rotação de f****, onde $\rho(f) = \rho(F)(mod 1)$ e $\rho(F) = \lim_{x\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n}$.*

Proposição 2. *Dado um homeomorfismo* $f : S^1 \to S^1$ *que preserva orientação, vale:*
1. O limite $\lim_{x\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n}$ *existe para todo* $x \in S^1$.
2. Este limite independe do valor de x*, e portanto podemos denotar apenas* $\rho(F)$.
3. Se F_1 *e* F_2 *são dois levantementos de* f*, então* $\rho(F_1) - \rho(F_2) = k$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Sendo assim,* $\rho(f) = \rho(F)(mod 1)$ *independe da escolha do levantamento* F.
4. $\rho(f)$ *depende continuamente de* f.

Proposição 3. $\rho(f) = 0$ *se, e somente se,* f *possui algum ponto fixo.*

Proposição 4. $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ *se, e somente se,* f *possui algum ponto periódico. Além disso,todo ponto de* S^1 *converge assintoticamente para a órbita de algum ponto periódico de* f. *Se* $\rho(f) = \frac{p}{q}$ *com* $p, q \in \mathbb{N}$ *e* $\frac{p}{q}$ *irredutível, então todo ponto periódico de* f *possui o mesmo período e este vale* q.

A seguinte proposição, o Closing Lemma, nos permite obter uma órbita periódica perturbando um ponto recorrente. Com isso, é possível analisar se um difeomorfismo estruturalmente estável pode ser Morse-Smale.

Proposição 5. *(Closing Lemma): Dado* $\epsilon > 0$ *e uma aplicação* $f \in Diff^k_+(S^1)$*, existe um difeomorfismo* $C^r - \epsilon$*-próximo de* f *com número de rotação racional.*

Conclusões

Tendo feito as definições e resultados preliminares, podemos provar que, um difeomorfismo no círculo é Morse-Smale se, e somente se, for estruturalmente estável.

Teorema 1. *Todo difeomorfismo Morse-Smale* $f \in Diff^1(S^1)$ *é estruturalmente estável.*

Proposição 6. *Se* $f \in Diff^1_+(S^1)$ *é um difeomorfismo estruturalmente estável então* f *é um difeomorfismo Morse-Smale.*

Vale notar que a aplicação dada no exemplo 3 não é Morse-Smale, pois o ponto fixo em questão da f não é hiperbólico. Portanto, pela proposição 6, tal f não é estruturalmente estável.
Sendo assim, caracterizamos as dinâmicas no círculo que não mudam por pequenas perturbações. Esse é um teorema importante e fundamental da teoria da estabilidade.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal de Itajubá pela oportunidade de realização desta pesquisa e pela qualidade de instrução e educação que me foi oferecida.
Ao órgão financiador CNPQ, pelo auxílio concedido, sem o qual esta pesquisa não poderia ter sido realizada.
Sou grata ao meu orientador, Bráulio Augusto Garcia, por acreditar em mim, pela paciência, por ter me apoiado em todos os momentos difíceis, e principalmente, por me dar uma chance de realizar esta meta acadêmica que eu tanto desejava.
E, por fim, agradeço a todos que me deram apoio e motivação para a realização desta pesquisa.

Referências

ABDENUR, Flávio; FRANÇA, Luiz Felipe Nobili. Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um. Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro, 2007.

BARREIRA, Luis; VALLS, Claudia. Dynamical Systems: An Introduction. Springer Science & Business Media, 2012.

DEVANEY, Robert L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley Publishing Company, 2003.

FRANÇA, Luiz Felipe Nobili. Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos Morse-Smale do Círculo. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.