ESPAÇOS-TEMPOS COM SIMETRIA ESPACIAL INTRÍNSECA II

Ygor de Oliveira Souza[1] (IC), Leandro Gustavo Gomes (PQ)[1]
[1]*Universidade Federal de Itajubá*

Palavras-chave: Cosmologia. Gravitação. Soluções Exatas.

Introdução

Neste trabalho, abordaremos inicialmente as soluções estáticas com simetria axial das equações de Einstein da relatividade geral, inicialmente executadas por Weyl e Levi-Civita nos anos iniciais desta teoria. Veremos esses espaços-tempos na sua forma mais geral, sem fixarmos as condições de fronteira à priori. Para tanto, seu desenvolvimento será feito a partir de um formalismo covariante, conhecido como formalismo (3+1). Além disto, vamos explorar um cenário onde as simetrias axiais passam a ter um caráter intrínseco, sendo o ambiente resultante mais geral do que os espaços-tempos de Weyl, possibilitando novas investigações com potencial aplicações à cosmologia.

Metodologia

O cronograma inicial deste trabalho foi previsto como:

a) Estudo das técnicas básicas de Geometria Diferencial para Relatividade Geral;
b) Esutdo do modelo padrão da Cosmologia;
c) Levantamento da literatura recente correspondente à anisotropia em Cosmologia;
d) Desenvolvimento do entendimento do papel da anistropia em modelos cosmológicos.

Pode-se dizer que o cronograma não somente foi realizado com esmero como também estendido, sendo que uma especialização para as aplicações cosmológicas de generalizações dos espaços-tempos de Weyl, envolvendo simetria axial intrínseca, foi feita e resultados novos começaram a ser obtidos. Com isso, na continuação desta IC já esperamos resultados científicos novos nessa direção, com potencial de publicação nas melhores revistas da área. Durante o período de I.C., a pesquisa se desenvolveu utilizando os seguintes recursos/metodologias:

a) Estudo da literatura da área atra'ves de livros-textos padrões e artigos científicos obtidos pela plataforma da CAPES;
b) Implementação computacional dos modelos com o "software" Mathematica, cuja licença é disponibilizada pela UNIFEI;
c) As reuniões seguiram de forma h;ibrida, tanto presencial no gabinete do professor, quanto de forma remota pela plataforma Google Meet.

Resultados e discussão

Neste trabalho estudaremos os espaços-tempos com simetria axial intrínseca e vorticidade nula que podem ser expressos como:

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{e}^{2\Phi}\mathrm{dt}^2 + \mathrm{e}^{-2\Psi}[e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2 d\varphi^2],$$

onde $\phi = \phi(t,r,z)$, $\psi = \psi(t,r,z)$ e $\lambda = \lambda(r,t,z)$. O tensor de expansão é expresso como

$$\theta_i^j = \frac{e^{-\phi}}{2} h^{jk}\dot{h}_{ki} = e^{-\phi}\begin{bmatrix} \dot{\lambda} - \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda} - \dot{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\psi} \end{bmatrix},$$

de onde H será escrito como

$$H = \frac{e^{-\phi}}{6} h^{jk}\dot{h}_{ki} = \frac{e^{-\phi}}{3}(2\dot{\lambda} - 3\dot{\psi}).$$

Em variáveis adequadas, podemos dividir as equações de Einstein em uma parte que relaciona a curvatura espacial com as anisotropias, por meio do escalar de curvatura espacial $\overline{R}$, e outra parte que relaciona o termo temporal da métrica considerada. A primeira equação, chamada de Friedmann generalizada, será

$$3(1-\Sigma^2)H^2 = \rho + \Lambda - \frac{1}{2}\overline{R},$$

e, a segunda, denominada equação de Raychaudhuri, tem a forma

$$3e^{-\phi}\dot{H} + 3(1+2\Sigma^2)H^2 = -\frac{1}{2}(\rho + 3P) + e^{-\phi}\overline{\nabla}^2 e^{\phi} + \Lambda.$$

Consideremos agora os espaços-tempos de Weyl obtidos quando tomamos $\Lambda = 0$ e $\phi = \psi$ na métrica acima, além de considerar apenas o vácuo. As coordenadas consideradas são tipicamente denominadas cilíndricas[1] e a métrica, portanto, tem a forma

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{e}^{2\phi}\mathrm{dt}^2 + \mathrm{e}^{-2\phi}\left[e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2 d\varphi^2\right].$$

É importante enfatizar que, aqui, $\phi = \phi(r,z)$ e $\lambda = \lambda(r,z)$. Fazendo $\Lambda = 0$ e aplicando a equação de Raychaudhuri, temos

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0,$$

que pode ser reconhecida como a equação de Laplace para coordenadas cilíndricas. Por outrdo lado, $\Lambda = 0$ na equação de Friedmann generalizada fornece

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = -\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right),$$

que definem λ em termos de ϕ. Logo, a métrica de Weyl é escrita a partir do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial r} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial r} = r\left[\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial z} = 2r\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{cases}$$

uma vez que as equações para λ são escritas por quadratura.

Conclusões

A investigação dos espaços-tempos de Weyl, usando o formalismo covariante (3+1), levou a formulações inéditas na literatura, como uma simplificação das equações de Einstein aplicadas aos espaços-tempos de Weyl generalizados, em particular, destacando o papel das anisotropias presentes. Esse resultado é importante para seguirmos com seu desenvolvimento na direção das aplicações à cosmologia, pois permite uma rápida generalização de uma teoria que, até então, era usada para descrever objetos astrofísicos isolados (buracos negros assintoticamente planos), e que nos próximas etapas será utilizada para descrever modelos cosmológicos conhecidos na literatura como "black hole lattices", onde esses objetos são distribuidos igualmente ao longo do espaço.

Ainda, uma interpretação física sobre as condições de contorno foi feita, partindo da expressão da métrica em coordenadas esferoidais, com forma

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & k^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\delta}(x^2-1)(1-y^2)d\varphi^2 \\ & + k^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\delta}(x^2 \\ & - y^2)\left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right)^{\delta^2}\left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{y^2-1}\right) \\ & - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)dt^2, \end{aligned}$$

onde k é uma constante qualquer, $\delta = m/k$ é um coeficiente de comparação e (x,y) é um sistema de coordenadas esferoidais prolatas. Neste caso, teremos, a partir do valor de δ, as seguintes fontes:

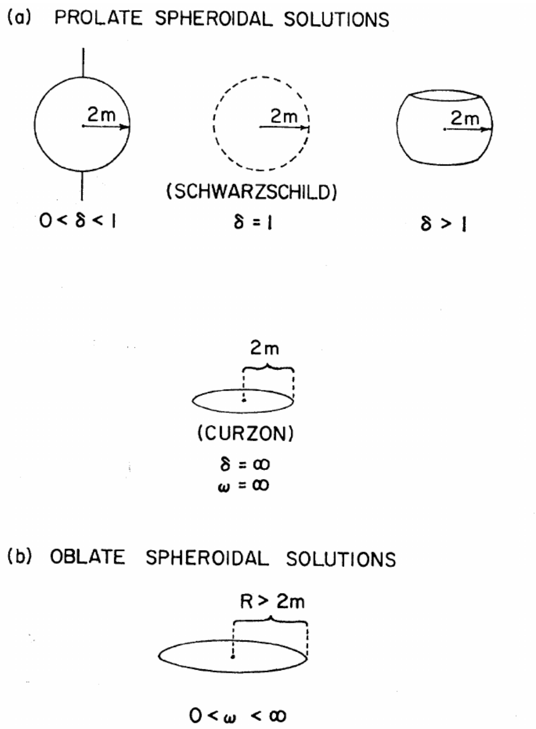

Figura 1: Fontes associadas à métricas esferoidais

Agradecimento

À minha família e à minha namorada Ana, agradeço pelo amor, companheirismo, paciência, apoio e incentivos constantes. Ao meu orientador Leandro Gomes pela

[1] Por mais que esse sistema foi referenciado como coordenadas cilíndricas, tenha em mente que essa interpretação não é necessariamente correta.

amizade, dedicação e ensinamentos, tanto como aluno quanto como pesquisador. Ao CNPq, órgão responsável pelo fomento à minha pesquisa.

Referências

[1] Belinskii, V.A. ; Khalatnikov, I.M. ; Lifshitz, E.M.: Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology. In: Advances in Physics 19 (1970), Nr. 80, S. 525-573.Disponível em: https://doi.org/10.1080/00018737000101171. Acesso em 17/09/2022.

[2] Binney, James ; Tremaine, Scott: Galactic Dynamics. Princeton University Press, 2008. – ISBN 0691130272

[3] Bittencourt, Eduardo ; Gomes, Leandro G. ; Klippert, Renato: Bianchi-I cosmology from causal thermodynamics. Em: Classical and Quantum Gravity 34 (2017), feb, Nr. 4, S. 045010. Disponível em: https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa5994. Acesso em 17/09/2022.

[4] Bizarria, Bruno B. ; Silva, Gabriel A. S. ; Gomes, Leandro G. ; Clavijo, William O.: The oscillatory anisotropy in the spatially flat cosmological models. Em: Annals of Physics 432 (2021), S. 168571. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491621001779. Acesso em 17/09/2022.

[5] Curzon, H. E. J.: Cylindrical Solutions of Einstein's Gravitation Equations. Em: Proceedings of the London Mathematical Society s2-23 (1925), Nr. 1, S. 477–480. Disponível em: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-23.1.477. Acesso em 17/09/2022.

[6] Dias, Fabio S. ; Santos, Grasiele B. ; Gomes, Leandro G. ; Mello, Luis F.: The power-law dependence between the matter-radiation and Hubble anisotropies. In: International Journal of Modern Physics D 31 (2022), 05, Nr. 07, S. 2250049

[7] Ellis, George F. R. ; Maartens, Roy ; MacCallum, Malcolm A. H.: Relativistic Cosmology. Cambridge University Press, 2012. – ISBN 9781139014403

[8] Gautreau, Ronald ; Hoffman, Richard B.: Exact solutions of the Einstein vacuum field equations in Weyl co-ordinates. In: Il Nuovo Cimento B (1965-1970) 61 (1969), S. 411–424.

[9] Gomes, Leandro G.: The nonlinear patterns of the cosmic anisotropy: the spatially flat perfect fluid universes. In: Classical and Quantum Gravity 39 (2021), dec, Nr. 2, S. 027001. Disponível em: https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac3ae1. Acesso em 17/09/2022.

[10] Griffiths, Jerry B. ; Podolský, Jiří: Exact Space-Times in Einstein's General Relativity. Cambridge University Press, 2009 (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

[11] Hoffman, Kenneth ; Kunze, Ray: Linear Algebra. Pearson, 1971. – ISBN 0135367972

[12] Magni, Stefano: Backreaction and the Covariant Formalism of General Relativity. (2012), 02.

[13] Quevedo, Hernando: General static axisymmetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates. In: Phys. Rev. D 39 (1989), May, S. 2904–2911. – URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.39.2904. Acesso em 17/09/2022.

[14] Ramos, Javier F. ; González, Guillermo A.: Solución de las ecuaciones de Einstein para espacio-tiempos de Weyl en coordenadas esferoidales generalizadas. In: Revista integración, temas de matemáticas 18 (2000), Nr. 1, S. 1–8. Disponível em: https://revistas.uis.edu.co/index. Acesso em 17/09/2022.
php/revistaintegracion/article/view/829

[15] Voorhees, B. H.: Static Axially Symmetric Gravitational Fields. In: Phys. Rev. D 2 (1970), Nov, S. 2119–2122. Disponível em: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.2119. Acesso em 17/09/2022.

[16] Zipoy, David M.: Topology of Some Spheroidal Metrics. In: Journal of Mathematical Physics 7 (1966), Nr. 6, S. 1137–1143. Disponível em: https://doi.org/10.1063/1.1705005. Acesso em 17/09/2022.